VERALLGEMEINERTE THEORIE

DER

POLARISKOPE UND POLARIMETER.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT VON

ROBERT BURG.

BERLIN 1892.

DRUCK VON J. S. PREUSS, JERUSALEMER-STR. 21

Die vorliegende Arbeit soll die Apparate theoretisch auseinandersetzen, mit deren Hilfe man irgend eine zur Untersuchung gestellte Lichterscheinung auf ihren Polarisationszustand hin prüfen kann.

Neben den wenigen hierzu construirten Apparaten giebt es eine beträchtliche Zahl von Instrumenten, welche, obwohl für Untersuchungen mineralogischer und saccharimetrischer Natur erdacht, dennoch polariskopischen Zwecken dienen können.

Bei der Darstellung der „bestimmungsgemässen" Anwendung der letzteren Apparate darf man von der Voraussetzung ausgehen, dass der Polarisationszustand des benutzten Lichtes theilweise bekannt sei, wie dies die Lehrbücher und Einzelabhandlungen allgemein thun. Will man dagegen darthun, wie ein Instrument dazu benutzt wird, den unbekannten Polarisationszustand einer gegebenen Lichterscheinung zu erforschen, so empfiehlt es sich, zur Vermeidung wiederholter Rechnungen die Erscheinungen, welche der Apparat zeigen kann, durch Gleichungen darzustellen, deren äussere Form von dem Polarisationszustand des benutzten Lichtes unabhängig ist.

Die hierzu nöthigen theoretischen Vorbetrachtungen bilden den ersten Theil dieser Arbeit, während der zweite Theil die Beschreibung und Theorie der einzelnen Apparate enthält.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542727_0126

Erster Theil.

§ I. Die Parameter des polarisirten Lichtes.

α) Die allgemeinste Schwingungsform des polarisirten Lichtes ist die Ellipse. Legen wir durch den Mittelpunkt einer Bahnellipse im Sinne eines Rechtsschraubensystems ein rechtwinkliges Coordinatensystem (x y z), zu dessen + z = Axe wir die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Lichtwelle nehmen, so können wir die elliptische Bewegung in zwei geradlinige Componenten zerlegen:

$$1)\quad \begin{cases} x = a \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon) \\ y = b \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon + \delta), \end{cases}$$

wo a und b positive Grössen sind.

(a b δ) heissen die Parameter dieser elliptischen Schwingung. $\delta = k\pi$ bedeutet geradlinig polarisirtes Licht; $a = b$ und $\delta = (k + {}^1/_2)\pi$ circularpolarisirtes Licht; k ist eine beliebige ganze Zahl.

Beziehen wir die Parameter (a b δ) statt auf (x y z) auf ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem (x_1 y_1 z), welches aus (x y z) durch die Drehung um die + z-Axe im Sinne x ⇒ y um $\sphericalangle \omega$ entstanden ist, so haben wir zu setzen:

$$x_1 = x \cos\omega + y \sin\omega \equiv a_1 \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon_1)$$
$$y_1 = -x \sin\omega + y \cos\omega \equiv b_1 \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon_1 + \delta_1)$$

und erhalten:

$$2)\quad \begin{cases} a_1^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega + 2ab \sin\omega \cos\omega \cos\delta \\ b_1^2 = a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega - 2ab \sin\omega \cos\omega \cos\delta \\ a_1 b_1 \cos\delta_1 = ab \cos\delta (\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (a^2 - b^2) \sin\omega \cos\omega \\ a_1 b_1 \sin\delta_1 = ab \sin\delta. \end{cases}$$

β) Hieraus sehen wir: a) $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$; diese Grösse ändert sich nicht mit ω; sie dient als Mass der Lichtintensität.

b) $a_1 b_1 \sin \delta_1 = ab \sin \delta$; also hat $\sin \delta_1$ dasselbe Vorzeichen wie $\sin \delta$. Ist dies Vorzeichen positiv, also δ im ersten oder zweiten Quadranten, so wird die Bahnellipse im Sinne $y \rightarrow x$, anderenfalls im Sinne $x \rightarrow y$ durchlaufen.

γ) Es ist:

$$\frac{d}{d\omega}(a_1^2) = 2\, a_1 b_1 \cos \delta_1; \quad \frac{d}{d\omega}(b_1^2) = -2\, a_1 b_1 \cos \delta_1;$$

beide Differentialquotienten werden gleichzeitig Null, wenn:

$$3) \quad \operatorname{tg} 2\omega = 2\, ab \cos \delta : (a^2 - b^2)$$

ist. Sind ω_1 und ω_2 die zwei um $\pi/2$ verschiedenen Wurzeln von 3) zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \pi$, so entspricht dem einen von ihnen (z. B. ω_1) ein Maximum von a_1^2 und ein Minimum von b_1^2, dem anderen (ω_2) ein Minimum von a_1^2 und ein Maximum von b_1^2. Für diese Werthe von ω verschwindet entweder $\cos \delta_1$ (bei elliptisch polarisirtem Licht) oder b_1 resp. a_1 (bei geradlinig polarisirtem Licht); bei circularpolarisirtem Lichte ist $\cos \delta_1$ stets $= 0$, mithin Gleichung 3) für jedes ω befriedigt.

Wir wollen, der Anschauung Fresnel's folgend, als Polarisationsebene p diejenige Ebene bezeichen, die auf der Maximumsrichtung von (a_1^2) $\perp$ steht. Dann ist: $\sphericalangle (x\, p) = \omega_2$; $\sphericalangle (y\, p) = \omega_1$.

§ II. Durchgang des Lichtes durch eine planparallele einaxige Krystallplatte.

α) Fällt das Licht senkrecht auf, so legen wir durch den Treffpunkt eines einfallenden Strahles ein rechtwinkliges Coordinatensystem $(x\, y\, z)$, dessen $+$ z-Axe mit der Fortpflanzungsrichtung dieses Strahles übereinstimmt, während die $+$ x-Axe der Projection der Krystallaxe auf die vordere Krystallfläche $\parallel$ ist.

Aus einer einfallenden Schwingung $(a\, b\, \delta)$ entstehen ausser einer reflektirten Schwingung $(a_r\, b_r\, \delta_r)$ eine ordentlich gebrochene Schwingung $(a_0\, b_0\, \delta_0)$ und eine ausserordentlich gebrochene Schwingung $(a_e\, b_e\, \delta_e)$. Nach der Anschauung Fresnel's ist: $a_0 = 0$ und $b_e = 0$. Die Schwingung $(a_0\, b_0\, \delta_0)$ liefert eine austretende Schwingung $(a'_0\, b'_0\, \delta'_0)$, die Schwingung $(a_e\, b_e\, \delta_e)$ liefert $(a'_e\, b'_e\, \delta'_e)$ und hier ist wiederum $a'_0 = 0$ und $b'_e = 0$, während δ'_0 und δ'_e bedeutungslos sind.

Schreiben wir

$$1)\quad a'_e = k\,a;\quad b'_0 = l\,b,$$

so sind die Faktoren k und l von der Natur und Orientirung des Krystalles abhängig und werden nur dann einander gleich, wenn die Krystallaxe mit der Plattennormale zusammenfällt. Jedoch ist der Unterschied zwischen k und l für alle bekannten Körper äusserst gering, $k : l$ nahezu $= 1$.

β) Da die beiden austretenden Strahlen einander $\parallel$ sind, so werden sich zwei Schwingungen $(a'_0\ b'_0\ \delta'_0)$ und $(a'_e\ b'_e\ \delta'_e)$, die den Krystall in demselben Punkte verlassen, zu einer einzigen Schingung $(a'\ b'\ \delta')$ zusammensetzen. Es ist dann:

$$2)\quad \begin{cases} a' = a'_e = k\,a;\ b' = b'_0 = l\,b; \\ \delta' = \delta + \triangle, \text{ wo } (\triangle\, T : 2\,\pi) \text{ die Zeit bedeutet,} \end{cases}$$

die die ausserordentliche Schwingung länger im Krystall weilt, als die ordentliche.

γ) Wenn das Licht nicht $\perp$ auffällt, so beschränken wir uns auf den Fall, wo der Incidenzwinkel i sehr klein ist. Wählen wir dann ein Coordinatensystem $(x_s\ y_s\ z)$, dessen $-z$-Axe mit der Plattennormale zusammenfällt, so ist die Schwingungskomponente des einfallenden Lichtes $\parallel$ der z-Axe sehr klein gegen die Schwingungskomponente $\parallel$ der $x_s\ y_s$-Ebene. Dasselbe gilt für das austretende Licht, da der austretende Strahl dem einfallenden $\parallel$ ist. Wir wollen deshalb die Schwingungskomponente $\parallel$ der z-Axe vernachlässigen.

Die in der $x_s\ y_s$-Ebene gelegenen Schwingungskomponenten zweier Strahlen, die den Krystall in demselben Punkte verlassen, können wir zu einer resultirenden Schwingung in der $x_s\ y_s$-Ebene zusammensetzen. Wählen wir die x_s-Axe in der Ebene, die den auffallenden Strahl mit der optischen Axe des Krystalles verbindet, und bezeichnen wir mit $(a_s\ b_s\ \delta_s)$ die Parameter der auffallenden, mit $(a'_s\ b'_s\ \delta'_s)$ die der austretenden Schwingung, so können wir auch hier schreiben:

$$3)\quad \begin{cases} a'_s = k\,a_s;\ b'_s = l\,b_s; \\ \delta'_s = \delta_s + \triangle_s, \text{ wo k und l den Grössen} \end{cases}$$

k und l in Gleichung 1) sehr nahezu gleich sind. Bezeichnen wir die Dicke der Krystallplatte mit d, den Brechungswinkel der ordentlichen Wellennormale mit r_0, den der ausserordentlichen mit r_e und mit v die Geschwindigkeit im umgebenden Medium, so ist:

$$\triangle = 2\,\pi\,d\,(\operatorname{ctg} r_e - \operatorname{ctg} r_0)\sin i : v\,T.$$

δ) Haben wir, wie beim convergenten Licht, Strahlen verschiedener Richtung gleichzeitig zu untersuchen, so beschränken wir uns auf den Fall, dass die Winkel zwischen jenen Richtungen sehr klein sind. Stellen wir dann die Krystallplatte $\perp$ zu einer mittleren Strahlenrichtung des convergenten Lichtes, so sind die Incidenzwinkel i für alle Strahlenrichtungen sehr klein. Die Plattennormale kann mithin als $\perp$ z-Axe aller Coordinatensysteme (x_s y_s z) dienen.

Die auf (x_s y_s z) bezogenen Parameter eines Strahles S können wir durch Drehung um die z-Axe auf das Coordinatensystem (x y z) der mittleren Strahlenrichtung beziehen; wir betrachten nun nur solches convergente Licht, bei dem die auf (x y z) bezogenen Parameter eines jeden Strahles S mit den Parametern (a b δ) der mittleren Strahlenrichtung übereinstimmen.

§ III. Constantes Licht.

α) Bisher haben wir polarisirtes Licht betrachtet, d. h. wir haben angenommen, dass bei ungehinderter Fortpflanzung des Lichtes die Parameter (a b δ) von der Zeit unabhängig sind. Wir wollen jetzt a, b und δ als Funktionen der Zeit t betrachten, aber annehmen, dass ein Werthsystem (a_k b_k δ_k), welches zur Zeit t_k zu gelten beginnt, stets bis zu einer Zeit $t_{k+1} = t_k + m_k T$ unverändert in Geltung bleibt, wo T die Schwingungsdauer und m_k eine sehr grosse Zahl bedeuten soll.

Ist dann f eine beliebige „stetige“ Function von a, b und δ,

$\tau = (m_1 + m_2 + \ldots . m_k + \ldots m_n) T$, wo n eine sehr grosse beliebige Zahl ist, und

$$F(t_1 \mid \tau) \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_1+\tau} f(a\ b\ \delta)\, dt, \text{ so ist:}$$

$$F(t_1 \mid \tau) = \frac{1}{\tau} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(a_1\ b_1\ \delta_1)\, dt + \int_{t_2}^{t_3} f(a_2\ b_2\ \delta_2)\, dt \right.$$

$$\left. + \ldots \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(a_k\ b_k\ \delta_k)\, dt + \ldots \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(a_n\ b_n\ \delta_n)\, dt \right)$$

$$= [m_1 f(a_1\ b_1\ \delta_1) + \ldots . m_n f(a_n\ b_n\ \delta_n)] : \Sigma m_k),$$

da die Werthe von f endlich sind und die Sprungstellen vereinzelt liegen.

Wir wollen nun eine Lichterscheinung „constant“ nennen, wenn ein Werth von n ($= n_0$) und mithin ein Werth von τ ($= \tau_0$) existirt, so dass für jedes f das Integral $F(t_1 \mid \tau_0)$ von t_1 unabhängig ist. Es folgt: Bedeutet l irgend eine ganze positive Zahl, so ist für constantes Licht auch $F(t_1 \mid l\,\tau_0)$ von t_1 unabhängig und $= F(t_1 \mid \tau_0)$. Denn es ist:

$$F(t_1 \mid l\tau_0) = F(t_1 \mid \tau_0) : l + F(t_1 + \tau_0 \mid \tau_0) : l + \ldots\ldots F(t_1 + [l-1]\,\tau_0 \mid \tau_0) : l$$
$$= l \,.\, [F(t_1 \mid \tau_0) : l] = F(t_1 \mid \tau_0).$$

Ist dagegen l keine ganze Zahl, g der ganzzahlige Theil von l und r (< 1) der Rest, so ist für constantes Licht:

$$F(t_1 \mid l\,\tau_0) = g\,\frac{1}{l}\,F(t_1 \mid \tau_0) + \frac{1}{l\,\tau_0}\int_{t_1 + g\,\tau_0}^{t_1 + l\,\tau_0} f\,dt.$$

β) Nehmen wir speciell: $f = a^2 + b^2$, d. h. proportional der Intensität der einzelnen elliptischen Schwingungen, so ist f also auch F stets positiv; in diesem Falle können wir daher, auch wenn l keine ganze Zahl ist, angenähert: $F(t_1 \mid l\,\tau_0) = F(t_1 \mid \tau_0)$ setzen, sobald g oder l gegen r (< 1) sehr gross sind.

γ) Da nun die Schwingungsdauer T für alle Farben ausserordentlich klein ist, so wird man, selbst wenn m_k und n_0 sehr grosse Zahlen sind, l noch sehr gross annehmen dürfen, ohne dass $l\,\tau_0$ die Zeit überschreitet, deren unser Auge bedarf, um eine Lichterscheinung als von der vorangehenden und nachfolgenden getrennt wahrzunehmen. Daraus folgt, dass constantes Licht, wenn es existirte, von uns als gleichmässig hell gesehen werden müsste; umgekehrt wollen wir annehmen, dass wir jede Lichterscheinung, die während der Beobachtungszeit andauernd gleich hell erscheint, für die Rechnung als constantes Licht ansehen dürfen.

In diesem Sinne beschränken wir uns auf constantes Licht.

§ IV. Allgemeine Parameter des Lichtes.

α) Wir geben der Funktion f die folgenden vier Bedeutungen:

$$a^2,\ b^2,\ a\,b\cos\delta \text{ und } a\,b\sin\delta,$$

und bezeichnen die entsprechenden Werthe von $F(t \mid \tau_0)$ mit A, B, C, D. Diese vier Grössen A, B, C, D heissen die Parameter der betreffenden Lichterscheinung.

β) Beziehen wir (A B C D) statt auf das Coordinatensystem (x y z) auf ein Coordinatensystem (x_1 y_1 z), wo $\sphericalangle$ x $x_1 = \omega$ ist, so folgt aus I. 2:

$$1) \quad \begin{cases} A_1 = A\cos^2\omega + B\sin^2\omega + 2C\sin\omega\cos\omega \\ B_1 = A\sin^2\omega + B\cos^2\omega - 2C\sin\omega\cos\omega \\ C_1 = C(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (A - B)\sin\omega\cos\omega \\ D_1 = D. \end{cases}$$

Analog der Ausführung in I γ) ergeben sich vier Werthe ω als Wurzeln der Gleichung:

$$2) \quad \operatorname{tg} 2\omega = 2C : (A - B),$$

für deren zwei ω_1 und ω_3 $(= \omega_1 + \pi)$ A_1 ein Maximum und B_1 ein Minimum, also $(A_1 - B_1)$ ein Maximum ist, während für die beiden anderen ω_2 und ω_4 $(= \omega_2 + \pi)$ das Umgekehrte statthat. Auch hier soll diejenige Ebene P die Polarisationsebene des Lichtes (A B C D) sein, für welche $\sphericalangle$ x P $= \omega_2$ ist.

γ) Um die Veränderungen zu untersuchen, welche die Parameter (A B C D) durch Reflexion und Brechung erleiden, machen wir die Annahme, dass wir bei der Behandlung der Reflexions- und Brechungserscheinungen die Interferenz der ersten der m_{k+1} Schwingungen $(a_{k+1}\ b_{k+1}\ \delta_{k+1})$ mit den letzten der m_k Schwingungen $(a_k\ b_k\ \delta_k)$ vernachlässigen dürfen, d. h. dass die auftretenden Gangunterschiede gegen die Zeiten m_k T verschwindend klein sind.

Dann erhalten wir, wenn das Licht (A B C D) $\perp$ durch eine einaxige Platte geht, deren optische Axe in der Ebene (+ x z) liegt:

$$3) \quad \begin{cases} A' = k^2 A;\ B' = l^2 B \\ C' = k\,l\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle); \\ D' = k\,l\,(D\cos\triangle + C\sin\triangle). \end{cases}$$

Beziehen wir dann (A' B' C' D') auf ein Coordinatensystem (x_1 y_1 z), für das $\sphericalangle$ x $x_1 = \omega$ ist, so folgt aus 1):

$$4) \quad \begin{cases} A'_1 = k^2 A\cos^2\omega + l^2 B\sin^2\omega \\ \qquad + 2\,k\,l\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle)\sin\omega\cos\omega \\ B'_1 = k^2 A\sin^2\omega + l^2 B\cos^2\omega \\ \qquad - 2\,k\,l\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle)\sin\omega\cos\omega \\ C'_1 = k\,l\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle)(\cos^2\omega - \sin^2\omega) \\ \qquad - (k^2 A - l^2 B)\sin\omega\cos\omega \\ D'_1 = k\,l\,(D\cos\triangle + C\sin\triangle). \end{cases}$$

δ) Geht dies Licht noch ⊥ durch eine zweite doppelbrechende Platte, welche dick genug ist, um die beiden Bilder zu trennen, so erhalten wir, wenn die optische Axe dieser Platte in der ⊥ x_1 z-Ebene liegt, für die Intensität des ausserordentlichen Bildes: $A''_1 = k_1^2 A'_1$ und für die des ordentlichen Bildes: $B''_1 = l_1^2 B'_1$. Solche Platte heisst ein Analyseur.

§ V. Natürliches Licht.

α) Man bezeichnet als natürliches Licht solches, für welches, nachdem es eine dünne doppelbrechende Platte und einen Analyseur ⊥ passirt hat, sowohl A''_1 als auch B''_1 von ω und $\triangle$ unabhängig wären, wenn man $k = 1$ setzen dürfte. Zwar ist die Gleichung $k = 1$ in Wirklichkeit niemals erfüllt, sobald überhaupt Doppelbrechung eintritt: die Gleichsetzung von k und l ist aber mit einem um so kleineren Fehler verbunden, je schwächer doppelbrechend die dünne doppelbrechende Platte ist.

β) Die obige Bedingung ist erfüllt, wenn z. B. A'_1 bei Gleichsetzung von k und l von ω und $\triangle$ unabhängig ist. Setzen wir $k = l$, so erhalten wir:

$$A'_1 = k^2 [A \cos^2\omega + B \sin^2\omega + 2 (C \cos\triangle - D \sin\triangle) \sin\omega \cos\omega].$$

Soll dieser Ausdruck von $\triangle$ unabhängig sein, so folgt:

1) $C = 0$ und $D = 0$.

Dann wird:

$$A'_1 = k^2 [A \cos^2\omega + B \sin^2\omega] = k^2 [A - (A - B) \sin^2\omega].$$

Damit dies von ω unabhängig ist, ist erforderlich:

2) $A = B$.

γ) Das natürliche Licht ist mithin definirt durch das Gleichungssystem:

3) $A = B$; $C = 0$; $D = 0$.

§ VI. Partiell polarisirtes Licht.

α) Wenn die Parameter (A B C D) nicht der Gleichung V. 3. genügen, so können sie doch nicht vollkommen willkürlich angenommen werden. Denn aus ihrer Definition folgt, dass:

1) A nicht < 0, B nicht < 0

und wie eine einfache Rechnung*) zeigt:

2) AB nicht $< C^2 + D^2$

sein darf.

*) Verdet (Exner) II S. 96.

Im Uebrigen wissen wir nur noch, dass, wenn das Licht total polarisirt ist: $AB = C^2 + D^2$ ist; doch dürfen wir diesen Satz noch nicht umkehren.

β) Wir wollen nun beweisen, dass eine jede Lichtbewegung (A B C D) — wo $\tau_0 = MT$ sein möge — aus einem regelmässigen Wechsel von $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots m_n)$ Schwingungen von den resp. Parametern $(a_1\ b_1\ d_1)$, $(a_2\ b_2\ d_2)$, $\ldots . (a_k\ b_k\ \delta_k) \ldots . (a_n\ b_n\ \delta_n)$ mit m Schwingungen $(a\ b\ \delta)$ derart entstanden gedacht werden kann, dass

a) $m_1 + m_2 + \ldots m_k + \ldots m_n + m = M$ ist, und dass

b) das Licht natürliches Licht wäre, wenn die m-Schwingungen $(a\ b\ \delta)$ jedesmal ausblieben.

Wir haben demnach zu setzen:

$$3)\quad \begin{cases} A = \dfrac{m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \ldots m_k a_k^2 + \ldots m_n a_n^2 + m a^2}{M} \\ B = \dfrac{m_1 b_1^2 + \ldots m_k b_k^2 + \ldots m_n b_n^2 + m b^2}{M} \\ C = \dfrac{m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + \ldots m_n a_n b_n \sin\delta_n + m a b \cos\delta}{M} \\ D = \dfrac{m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + \ldots . m_n a_n b_n \sin\delta_n + m a b \sin\delta}{M}, \end{cases}$$

und ferner:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{m_1 a_1^2 + \ldots m_k a_k^2 + \ldots m_n a_n^2}{m_1 + m_2 + \ldots m_k + \ldots m_n} = \dfrac{m_1 b_1^2 + \ldots m_k b_k^2 + \ldots m_n b_n^2}{m_1 + m_2 + \ldots m_k + \ldots m_n} \\ \dfrac{m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + \ldots m_k a_k b_k \cos\delta_k + \ldots m_n a_n b_n \cos\delta_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_k + \ldots m_n} = 0 \\ \dfrac{m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + \ldots m_k a_k b_k \sin\delta_k + \ldots m_n a_n b_n \sin\delta_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_k + \ldots m_n} = 0. \end{cases}$$

Diese letzten drei Gleichungen bleiben offenbar bestehen, wenn man im Nenner an Stelle von $m_1 + m_2 + \ldots . m_k + \ldots m_n$ die Zahl M setzt. Wir erhalten dann:

5) $A - (m a^2 : M) = B - (m b^2 : M)$.

6) $C = m a b \cos\delta : M$; $D = m a b \sin\delta : M$.

Quadriren wir die Gleichungen 6) und addiren, so folgt:

7) $(m a b : M)^2 = C^2 + D^2$,

und dann aus 6):

8) $\cos\delta = \pm C : \sqrt{C^2 + D^2}$; $\sin\delta = \pm D : \sqrt{C^2 + D^2}$.

und, wie auch direct folgt: $\operatorname{tg}\delta = D : C$.

Endlich folgt aus 5) und 7):

$$9)\quad \begin{cases} m\,a^2 : M = +\tfrac{1}{2}(A-B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)} \\ m\,b^2 : M = -\tfrac{1}{2}(A-B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)}. \end{cases}$$

Die Wahl des Vorzeichens vor den Wurzeln ergiebt sich daraus, dass sowohl $(m\,a^2 : M)$ als auch $(m\,b^2 : M) > 0$ sein müssen. Da nämlich der halbe positiv genommene Wurzelwerth

$$> \tfrac{1}{2}(A-B)$$

ist, so sind in 9) beide rechten Seiten > 0, wenn man vor den Wurzeln das Pluszeichen annimmt.

Bei Annahme des Minuszeichens würden die rechten Seiten von 9) < 0; mithin ist das Minuszeichen zu verwerfen. Also:

$$10)\quad \begin{cases} m\,a^2 : M = +\tfrac{1}{2}(A-B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)} \\ m\,b^2 : M = -\tfrac{1}{2}(A-B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)}. \end{cases}$$

Wir haben aber noch eine Bedingung als erfüllt nachzuweisen, dass nämlich $(m\,a^2 : M)$ und $(m\,b^2 : M)$ einzeln $\leq A$ resp. B seien, da $A - (m\,a^2 : M)$ und $B - (m\,b^2 : M)$ Summen von Quadraten sind. Es ist also zu zeigen, dass:

$$A - \tfrac{1}{2}(A-B) > \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)}$$

$$B - \tfrac{1}{2}(A-B) > \tfrac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)} \text{ ist.}$$

Diese beiden Forderungen sind identisch; wir können sie schreiben:

$$\tfrac{1}{4}(A+B)^2 > \tfrac{1}{4}(A-B)^2 + (C^2+D^2) \text{ oder: } A\,B > C^2 + D^2.$$

Aber auch diese Forderung ist nach 2) stets erfüllt. Somit ist unsere Behauptung β) bewiesen.

γ) Nehmen wir $\sqrt{m : M}$ und ebenso — wie immer — die Grössen a und b positiv, so folgt aus 6), dass in 8) das Pluszeichen vor die Wurzel zu setzen ist; also:

$$11)\quad \cos\delta = +C : \sqrt{C^2+D^2};\ \sin\delta = +D : \sqrt{C^2+D^2}.$$

Dann folgt weiter (§ 1. β. b.), dass der Drehungssinn der Schwingungen (a b δ): $y \rightsquigarrow x$ ist, wenn $D > 0$, dagegen $x \rightsquigarrow y$, wenn $D < 0$ ist.

δ) $\sphericalangle\, x\,P$ der Lichtbewegung (A B C C) war eine Wurzel der Gleichung: $\operatorname{tg} 2\omega = 2\,C : (A-B)$. $\sphericalangle\, x\,p$ der Schwingung (a b δ) ist eine Wurzel der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\,\omega = 2\,a\,b\cos\delta : (a^2 - b^2).$$

Da aber nach 6) und 10) $2\,C : (A - B) = 2\,a\,b \cos \delta : (a^2 - b^2)$ ist, so ist also P und p identisch.

ε) Ist das Licht (A B C D) weder natürliches noch total polarisirtes Licht, so ist: $0 < (m : M) < 1$. Innerhalb dieser Grenzen können wir $(m : M)$ jeden beliebigen rationalen Werth geben, und dementsprechend ändern sich die aus 10) zu ermittelnden Werthe von a und b. Wir erhalten also die Gestalt und Lage einer Ellipse — im allgemeinen Falle —, zu der die Schwingungsellipse ähnlich und ähnlichliegend anzunehmen ist; ferner die Grösse $m\,(a^2 + b^2) : M$.

ζ) Man nennt die Lichtbewegung (A B C D) partiell polarisirt mit den Parametern (a b δ) der partiellen Polarisation, und sagt, sie sei „zusammengesetzt“ aus natürlichem Lichte und dem total polarisirten Lichte (a b δ). Als „Mass der partiellen Polarisation“ wollen wir, gemäss der üblichen Definition dieses Ausdruckes für partiell geradlinig polarisirtes Licht, allgemein definiren:

$$Q = [m\,(a^2 + b^2) : M] : (A + B)$$
$$= + \sqrt{(A - B)^2 + 4\,(C^2 + D^2)} : (A + B).$$

Q ist $= 0$, für $A = B$, $C = 0$, $D = 0$, d. h. für natürliches Licht; in diesem Falle ist $(m : M) = 0$ zu setzen, a b und δ werden bedeutungslos. Q ist $= 1$, für $A\,B = C^2 + D^2$, d. h. für total polarisirtes Licht; setzt man in diesem Falle $m = M$, so wird $a^2 = A$ und $b^2 = B$.

η) Je nachdem die Schwingungen (a b δ) für sich allein elliptisch, circular oder geradlinig polarisirtes Licht darstellen, nennt man (A B C D) partiell elliptisch, partiell circular, partiell geradlinig polarisirt. Doch werden wir meist das Wort „partiell“ fortlassen und statt dessen den Fall: $A\,B = C^2 + D^2$ durch das Wort „total“ bezeichnen.

§ VII. Die sieben Klassen des Lichtes.

Wir unterscheiden gemäss den zwischen den Parametern (A B C D) bestehenden Beziehungen sieben Klassen von Licht. Die erste derselben, das natürliche Licht, ist durch die Gleichungen: $A = B$, $C = 0$, $D = 0$ charakterisirt. Die zweite und dritte Klasse umfasst das circularpolarisirte Licht: es gelten die Gleichungen $A = B$, $C = 0$; je nachdem $A\,B >$ oder $= D^2$

ist, ist das Licht partiell oder total polarisirt. Das geradlinig polarisirte Licht bildet die vierte und fünfte Klasse; es ist $D = 0$, und bei partieller Polarisation $AB > C^2$, bei totaler $AB = C^2$. Die sechste und siebente Klasse endlich bildet das elliptisch polarisirte Licht; $AB > C^2 + D^2$ bedeutet partielle, $AB = C^2 + D^2$ totale Polarisation; das Vorzeichen von D entscheidet den Drehungssinn der Bahnellipse.

Zweiter Theil.

§ VIII. Eintheilung.

α) Die Aufgabe, den unbekannten Polarisationszustand eines gegebenen Lichtes (A B C D) zu erforschen, zerfällt in zwei Theile, entsprechend den Aufgaben der qualitativen und der quantitativen Analyse. Dieser Unterscheidung entspricht es im Wesentlichen, wenn wir die Instrumente, welche zur Analyse des Polarisationszustandes dienen, in Polariskope und Polarimeter eintheilen.

β) Die Aufgabe der Polariskope besteht im Wesentlichen darin, die folgenden fünf Fragen zu beantworten:

a) In welche der sieben Klassen gehört das gegebene Licht (A B C D)?

b) Wie liegt seine Polarisationsebene P?

c) In welchem Sinne geschieht die Schwingung (a b δ) des Lichtes (A B C D)?

d) Welchen Werth hat δ?

e) Welchen Werth hat (a : b)?

Die Polarimeter haben es dagegen nur mit der einen Frage zu thun:

Welchen Werth hat Q?

γ) Unter den Polariskopen unterscheiden wir einfache und zusammengesetzte. Die einfachen Polariskope benutzen entweder die Reflexion oder die Doppelbrechung des Lichtes; in letzterem Fall wollen wir sie als „Analyseure aus Krystallen“ bezeichnen. Die zusammengesetzten Polariskope beruhen aus-

nahmslos auf der Doppelbrechung; einer ihrer Bestandtheile ist stets ein Analyseur. Endlich zerfallen die Analyseure und zusammengesetzten Polariskope noch in je zwei Abtheilungen, solche zur Beobachtung im paralellen Licht und solche zur Untersuchung des convergenten Lichtes.

A. Einfache Polariskope.

§ IX. Der planparallele Glasspiegel.

α) Eine ebene, auf der Rückseite geschwärzte Glasplatte werde von parallelen Strahlen (A B C D) unter dem Incidenzwinkel i getroffen; r sei der entsprechende Brechungswinkel.

Durch den Treffpunkt M eines auffallenden Strahles legen wir drei Coordinatensysteme (x y z), (x′ y′ z′) und (x″ y″ z″), sodass die + z-Axe, + z′-Axe resp. + z″-Axe der Fortpflanzungsrichtung des auffallenden, reflektirten resp. gebrochenen Strahles ∥ ist; die + x-Axe, + x′-Axe und + x″-Axe falle zusammen mit der Senkrechten auf der Einfallsebene. Dann wird ∢ y y′ von der Plattennormale M N halbirt, während die + y-Axe und + y″-Axe auf derselben Seite von M N liegt.

Bezeichnen wir die Parameter von m_k gleichen Schwingungen des einfallenden Lichtes, bezogen auf (x y z), mit (a_k b_k δ_k), die Parameter der aus ihnen entstehenden m_k Schwingungen des reflektirten Lichtes, bezogen auf (x′ y′ z′) mit (a'_k b'_k δ'_k) und die Parameter der entsprechenden m_k Schwingungen des gebrochenen Lichtes, bezogen auf (x″ y″ z″) mit (a''_k b''_k δ''_k), so folgt unter den Voraussetzungen Fresnel's aus dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft*):

$$1) \quad \begin{cases} (a_k^2 - a'^2_k) \sin r \cos i = a''^2_k \sin i \cos r \\ (b_k^2 - b'^2_k) \sin r \cos i = b''^2_k \sin i \cos r. \end{cases}$$

Um das Princip der Continuität anzuwenden, zerlegen wir b_k, b'_k und b''_k in zwei Componenten ∥ und ⊥ zur Normalen M N und nehmen, mit Fresnel, die Continuität in der Einfallsebene

*) Verdet (Exner) II. S. 342.

nur für die letztere Componente und ausserdem ⊥ zur Einfallsebene an. Dann folgt:

$$2)\quad \begin{cases} a_k + a'_k = a''_k \\ b_k \cos i - b'_k \cos i = b''_k \cos r. \end{cases}$$

Durch Combination von 1) und 2) erhalten wir:

$$(a_k - a'_k) \sin r \cos i = (a_k + a'_k) \sin i \cos r$$
$$a'_k \sin (i + r) = - a_k \sin (i - r);$$

also:

$$3)\quad a'_k = - \sin (i - r)\, a_k : \sin (i + r).$$

Ferner:

$$(b_k + b'_k) \sin r \cos r = (b_k - b'_k) \sin i \cos i$$
$$b'_k (\sin 2i + \sin 2r) = b_k (\sin 2i - \sin 2r);$$

also:

$$4)\quad b'_k = + \operatorname{tg} (i - r)\, b_k : \operatorname{tg} (i + r).$$

β) δ'_k ist $= \delta_k$, wenn wir für a'_k und b'_k die Werthe aus 3) und 4) benutzen. Wollen wir — wie sonst — a'_k und b'_k positiv wählen, so wäre $\delta'_k = \delta_k + {}^1/_2\,\pi$ oder $= \delta_k$ zu setzen, je nachdem $\operatorname{tg} (i + r) > 0$ oder < 0, also je nachdem $(i + r) < {}^1/_2\,\pi$ oder $> {}^1/_2\,\pi$ ist.

γ) Gehen wir von den Einzelschwingungen $(a_k\ b_k\ \delta_k)$ zu den Parametern (A B C D) über, so erhalten wir für die auf (x' y' z') bezogenen Parameter des reflektirten Lichtes, wenn wir $\sin (i - r) : \sin (i + r) = \sigma$; $\operatorname{tg} (i - r) : \operatorname{tg} (i + r) = \tau$ setzen:

$$5)\quad \begin{cases} A' = \sigma^2 A; \quad B' = \tau^2 B \\ C' = \sigma\tau C; \quad D' = \sigma\tau D. \end{cases}$$

Hieraus folgt unter Anderem, dass geradlinig polarisirtes Licht geradlinig polarisirt bleibt; denn wenn D = 0 ist, ist auch D' = 0. Ferner sieht man, dass der Drehungssinn der Schwingungen (a b δ) des Lichtes (A B C D) sich umkehrt, wenn $i + r < {}^1/_2\,\pi$ ist, dagegen erhalten bleibt für $i + r > {}^1/_2\,\pi$. Wenn $i + r = {}^1/_2\,\pi$ ist, geht circularpolarisirtes Licht in elliptisch polarisirtes, natürliches Licht in partiell geradlinig polarisirtes über. Total polarisirtes Licht bleibt total polarisirt etc.

δ) Um nun diese Glasplatte als Polariskop zu benutzen, macht man gewöhnlich:

$$6)\quad i + r = {}^1/_2\pi,$$

d. h. i = dem Polarisationswinkel. Dann ist $\tau = 0$ und folglich:

$$7)\quad \begin{cases} A' = \sigma^2 A; \quad B' = 0 \\ C' = 0; \quad D' = 0. \end{cases}$$

Dreht man jetzt die Glasplatte und mit ihr alle drei Coordinatensysteme um $\sphericalangle \omega$ um die z-Axe, wobei also $\sphericalangle i$ unverändert bleibt, so geht A über in:

$$A_1 = A \cos^2\omega + B \sin^2\omega + 2\,C \sin\omega \cos\omega$$

und A' in:

$$A'_1 = \sigma^2 [A \cos^2\omega + B \sin^2\omega + 2\,C \sin\omega \cos\omega],$$

während B'_1, C'_1 und D'_1 nach wie vor Null bleiben.

Bleibt dann während der Drehung A'_1 constant $= A'$, so war das einfallende Licht natürliches Licht oder circularpolarisirt. Aendert sich aber A'_1 und hat bei einer bestimmten Lage der Platte ein Minimum, so ist die entsprechende Ebene (x, z) die Polarisationsebene des einfallenden elliptisch oder geradlinig polarisirten Lichtes. Ist dies Minimum Null, so war das Licht total geradlinig polarisirt.

ε) Man beobachtet A'_1, welches in diesem Falle, da $B'_1 = 0$ ist, die Gesammtintensität des reflektirten Lichtes darstellt, direkt mit dem Auge.

§ X. Analyseure aus Krystallen.

α) Die Verwendung dieser Analyseure zu polariskopischen Zwecken beruht auf der Trennung der beiden Bilder, die die ausserordentlichen und die ordentlichen Strahlen erzeugen. Diese Trennung wird bei einigen Analyseuren durch Beschränkung der Dimensionen der einfallenden Lichtwelle erreicht, wie z. B. bei der dichroskopischen Loupe, bei anderen dadurch, dass die Strahlen des einen der beiden Bilder garnicht in das beobachtende Auge gelangen.

β) Ein natürliches Polariskop der letzteren Art liefert eine $\parallel$ der optischen Axe geschnittene Turmalinplatte, welche für alle auffallenden Strahlen den ordentlich gebrochenen Strahl absorbirt. Sie eignet sich deshalb besonders für Beobachtungen im convergenten Licht.

Die anderen Analyseure dieser Art sind so eingerichtet, dass der eine der gebrochenen Strahlen eine totale Reflexion im Innern des Analyseurs erleidet und dadurch ganz nach den Wänden des Analyseurs abgelenkt wird, die ihn dann absorbiren. Doch lässt sich das stets nur für bestimmte, niemals für alle Werthe des Incidenzwinkels erreichen, und je nachdem das Intervall des statthaften Incidenzwinkels grösser oder

kleiner ist, eignet sich der betreffende Analyseur mehr oder weniger zu Beobachtungen im convergenten Licht. So umfasst bei dem bekanntesten aller Analyseure, dem Nikol'schen Prisma, das Intervall des statthaften Incidenzwinkels nur ungefähr 25^0.

γ) Die Theorie der polariskopischen Anwendung der Analyseure ist als Specialfall in § XI. enthalten.

B. Zusammengesetzte Polariskope.

1. Polariskope für paralleles Licht.

§ XI. Die einaxige Krystallplatte mit Analyseur.

α) Das zu untersuchende Licht geht $\perp$ durch eine feste, dünne doppeltbrechende Platte (k l) und darauf $\perp$ durch einen um die Strahlenrichtung drehbaren Analyseur. Wir nehmen ein Coordinatensystem (x y z), dessen $\perp$ z-Axe der Fortpflanzungsrichtung der auffallenden Strahlen $\perp$ ist, während die $\perp$ x-Axe mit der Projection der optischen Axe auf die vordere Krystallfläche übereinstimmt.

Sind (A B C D) die auf (x y z) bezogenen Parameter des auffallenden Lichtes, so erhalten wir nach dem Austritt aus der Platte:

$$1)\quad \begin{cases} A' = k^2 A; B' = l^2 B \\ C' = kl(C\cos\triangle - D\sin\triangle); D' = kl(C\sin\triangle + D\cos\triangle). \end{cases}$$

Bildet nun die Projection der optischen Axe des Analyseurs auf seine vordere Fläche mit der x-Axe den $\sphericalangle \omega$, so liefert (IV γ, δ) der Analyseur zwei Bilder von der Helligkeit.

$$2)\quad \begin{cases} E = k_1^2 [k^2 A \cos^2\omega + l^2 B \sin^2\omega \\ \qquad + 2kl(C\cos\triangle - D\sin\triangle)\sin\omega\cos\omega] \\ O = l_1^2 [k^2 A \sin^2\omega + l^2 B \cos^2\omega \\ \qquad - 2kl(C\cos\triangle - D\sin\triangle)\sin\omega\cos\omega]. \end{cases}$$

Dabei sind k, l, k_1 und l_1 Constanten, die von der Materie und dem Schnitt der Platte und des Analyseurs abhängen; $\triangle$ ist für jede bestimmte Farbe durch die Dicke der Platte bestimmt; ω dagegen nehme während eines Versuches alle Werthe von 0 bis 2π an. E und O, bezüglich die Differenz (E — O) wird direkt mit dem Auge beobachtet. Es kommt

darauf an, zu sehen, ob $(E-O)$ sich ändert, und, wenn dies der Fall ist, für welche Werthe von ω $(E-O)$ ein Maximum resp. ein Minimum ist.

β) Angenommen $(E-O)$ erschiene constant, d. h. unabhängig von ω, so darf man, da k_1 und l_1 nahezu gleich sind, auch $(E:k_1^2)-(O:l_1^2)=(A'-B')\cos 2\omega+2C'\sin 2\omega$ als von ω unabhängig annehmen. Also: $A'-B'=0$ und $C'=0$. Damit aber $A'-B'=0$ sei, ist es, weil wiederum k und l nahezu gleich sind, nöthig, dass auch $(A-B)$ sich nicht merklich von Null unterscheide. Es folgt also:

$$3)\quad A=B;\ C\cos\triangle-D\sin\triangle=0.$$

Wenn wir den Versuch mit einem beliebigen $\triangle$, welches kein ganzes Vielfaches von $\pi/2$ ist, angestellt haben, so schliesst das Eintreten des vorliegenden Falles β) die beiden Lichtarten $(C^2=0, D^2>0)$ und $(C^2>0, D^2=0)$ aus. Fall β) tritt stets ein bei natürlichem Licht, und für elliptisch polarisirtes Licht $(C^2>0, D^2>0)$ dann, wenn zufällig $\operatorname{tg}\triangle=C:D$ sein sollte; um diese Zweideutigkeit zu beseitigen, genügt ein zweiter Versuch, dessen $\triangle$ von dem des ersten Versuchs nicht gerade um ein Vielfaches von π verschieden ist. Für natürliches Licht muss Fall β) auch beim zweiten Versuch eintreten; für elliptisch polarisirtes Licht ist dies unmöglich.

Nehmen wir dagegen beim ersten Versuche $\triangle=2n\,\pi/2$, beim zweiten $\triangle=(2n+1)\,\pi/2$, so muss sich erstens — wie oben — natürliches Licht durch beidesmaliges Eintreten des Falles β) verrathen; ferner folgt, wenn Fall β) „nur“ beim ersten Versuch eintritt, dass $C^2=0, D^2>0$, das Licht also circularpolarisirt ist; tritt β) „nur“ beim zweiten Versuch ein, so folgt, dass $C^2>0$, $D^2=0$, das Licht also unter 45^0 gegen den Hauptschnitt der Platte geradlinig polarisirt ist. Tritt endlich Fall β) bei keinem dieser Versuche ein, so ist entweder $A=B$ oder $C^2>0$, $D^2>0$ oder beides.

γ) Wenn $(E-O)$ sich mit ω merklich ändert, so muss dasselbe auch von $(A'-B')\cos 2\omega+2C'\sin 2\omega$ gelten. Differentiiren wir diese Gleichung nach ω und setzen den Differentialquotienten = Null, so folgt für ω die Gleichung:

$$4)\quad \operatorname{tg} 2\omega=2C':(A'-B').$$

Den vier um je $\pi/2$ verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung entsprechen zwei Maxima und zwei Minima von $(E-O)$:

ω_1 sei die dem ersten Maximum, ω_2 die dem ersten Minimum entsprechende Wurzel von 4). Dann ist $\omega_1 = \omega_2 \pm \pi/2$ und sowohl ω_1 wie ω_2 sind $< \pi$. Aus 4) folgt für:

$\omega_1 = 0$	$A' - B' > 0$ und	$C' = 0$
$0 < \omega_1 < \pi/4$	$A' - B' > 0$ „	$C' > 0$
$\omega_1 = \pi/4$	$A' - B' = 0$ „	$C' > 0$
$\pi/4 < \omega_1 < \pi/2$	$A' - B' < 0$ „	$C' > 0$
$\omega_1 = \pi/2$	$A' - B' < 0$ „	$C' = 0$
$\pi/2 < \omega_1 < 3\pi/4$	$A' - B' < 0$ „	$C' < 0$
$\omega_1 = 3\pi/4$	$A' - B' = 0$ „	$C' < 0$
$3\pi/4 < \omega_1 < \pi$	$A' - B' > 0$ „	$C' < 0$
$\omega_1 = \pi$	$A' - B' > 0$ „	$C' = 0.$

Was folgt nun aus dieser Tabelle für die ursprünglichen Parameter (A B C D)? Zunächst ist k und l so wenig von einander verschieden, dass die für (A′ — B′) geltenden Relationen näherungsweise auf (A — B) übertragen werden können. Die Beobachtung von ω_1 giebt also zunächst Aufschluss darüber, ob A = B, A > B oder A < B ist. C und D sind mit C′ durch die Gleichung verknüpft:

$$k\,l\,(C \cos \triangle - D \sin \triangle) = C'.$$

k l ist jedenfalls positiv; mithin gelten die für C′ gefundenen Relationen auch für: (C cos △ — D sin △). Um nun über C und D einzeln das Wünschenswerthe zu erfahren, müssen wir wissen, ob die Zahl n gerade oder ungerade war; wir wollen z. B. n gerade annehmen, d. h. wir machen den ersten Versuch mit: $\triangle = 4k\pi/2$, den zweiten mit: $\triangle = (4k+1)\pi/2$. Dann hat C′ beim ersten Versuch den Werth k l C, beim zweiten Versuch den Werth — k l D. Wir können also in obige Tabelle an Stelle von C′ beim ersten Versuch C, beim zweiten — D einsetzen.

Bezeichnen wir den $\sphericalangle$ ω_1 des ersten Maximums von (E — O) für den ersten Versuch mit ω_1', für den zweiten mit ω_1'', so liefert demnach ω_1' die gesuchte Relation für C, ω_1'' diejenige für D. Jeder von beiden Winkeln liefert eine Relation für (A — B), doch sind diese beiden, wie leicht zu zeigen ist, stets in Einklang mit einander. Unsere beiden Versuche geben mithin vollen Aufschluss über die Klasse des einfallenden Lichtes (A B C D). Sie geben uns auch den Drehungssinn der Schwingungen (a b δ) von (A B C D) an, vermittelst des Vorzeichens

von D. Und auch die Polarisationsebene P wird angenähert bestimmt; denn aus der Gleichung $\operatorname{tg} 2\,(y\,P) = 2\,C : (A - B)$ folgt angenähert:

$$\sphericalangle\, y\,P \quad \omega_1'.$$

δ) Endlich ist noch zu fragen, ob das gegebene Licht partiell oder total polarisirt ist. Aus $A\,B = C^2 + D^2$ folgt stets $A'\,B' = C'^2 + D'^2$ und umgekehrt.

War $D = 0$, d. h. das Licht geradlinig polarisirt, so muss bei totaler Polarisation für $\sphericalangle\, \omega_1'$ die Intensität O ganz verschwinden. Für $D \quad 0$ folgt nämlich aus der Gleichung $A'\,B' = C'^2 + D'^2$ die Gleichung $A'\,B' = C'^2$, denn beim ersten Versuch wird auch $D' = 0$. Aus:

$$\operatorname{tg} 2\,\omega_1' = 2\,C' : (A' - B')$$

folgt dann:

$$\cos^2 \omega_1' = A' : (A' + B');\ \sin^2 \omega_1' = B' : (A' + B');$$
$$C' \sin 2\omega_1' = 2\,A'\,B' : (A' + B'),$$

also:

$$O = l_1^2\,(A'\,B' + A'\,B' - 2\,A'\,B') : (A' + B') = 0.$$

War $C = 0$, z. B. das Licht circularpolarisirt, so muss bei totaler Polarisation O beim zweiten Versuch, d. h. für $\sphericalangle\, \omega_1''$ verschwinden. Denn hier folgt aus $C = 0$ wiederum $D' = 0$ und also wiederum $A'\,B' = C'^2$.

War weder $C = 0$ noch $D = 0$, das Licht also elliptisch polarisirt, so können wir, ohne die Krystallplatte zu drehen, die totale Polarisation nicht erkennen. Drehen wir aber die Platte so lange um die z-Axe, bis ihr Hauptschnitt auf der Polarisationsebene P $\perp$ steht, so wird $C = 0$ und bei totaler Polarisation muss O für $\omega = \omega_1''$ verschwinden.

ε) In der Praxis nimmt man für die Werthe $\triangle = 4\,k\,\pi/2$ und $\triangle = (4\,k + 1)\,\pi/2$ die Zahl k beidemal = Null. Beim ersten Versuch operirt man also nur mit dem Analyseur allein, beim zweiten ausserdem mit einer Platte, für welche $\Delta = \pi/2$ ist ($\lambda/4$-Plättchen). Bei dieser Art des ersten Versuchs ist $k = l = 1$; da Δ überhaupt verschwindet, bleibt dieser erste Versuch auch bei gemischtem Lichte anwendbar. Der zweite Versuch dagegen enthält Δ im Ausdruck für E und O und liefert daher für gemischtes Licht Farbenerscheinungen, die mit wechselndem ω variiren. Nur wenn $C = 0$ und $D = 0$ ist, d. h. für natürliches Licht und geradlinig in der x z- oder y z-Ebene

polarisirtes Licht tritt keine Farbenerscheinung auf, da E und O von Δ unabhängig werden.

Hierauf beruht z. B. das Kaleidopolariskop von Petrina, bei welchem verschiedene Theile des auffallenden Lichtes durch verschiedene Glimmerblättchen von wechselnder Dicke und Orientirung hindurchgehen und dann gleichzeitig durch einen Analyseur betrachtet werden. Den Analyseur zu drehen ist hier überflüssig; das Ausbleiben der Farben zeigt natürliches Licht an.

ζ) Bei der Anwendung solcher Analyseure, welche nur eines der beiden Bilder liefern, kann man nur dieses, und nicht (E — O) beobachten. Trotzdem bleiben unsere obigen Betrachtungen anwendbar, da wir wissen, dass z. B. einem Maximum von E ein Minimum von O und folglich gewiss ein Maximum von (E — O) als gleichzeitig entsprechen würde.

§ XII. Fortsetzung von § XI.

α) Im vorigen Paragraphen haben wir, um von den Relationen betreffend $(A' - B')$ zu solchen über $(A - B)$ zu gelangen, k und l als einander gleich betrachtet. Streng genommen, ist diese Gleichheit aber unrichtig.

Wollen wir einen solchen Fehler vermeiden, so haben wir nur nöthig, eine zweite Krystallplatte, für die k und l dieselben Werthe haben wie für die erste Platte (d. h. von gleicher Substanz und Orientirung), z. B. zwischen die erste Platte und den Analyseur so einzuschieben, dass sie erstens ebenfalls auf der + z-Axe $\perp$ steht und dass zweitens ihre Axenprojection mit der + x-Axe einen Winkel von $\pi/2$ $(3\pi/2)$ bildet.

Nehmen wir diese Axenprojection zur x_1-Axe eines neuen Coordinatensystems $(x_1\ y_1\ z)$ so erhalten wir für die Parameter des aus der ersten Platte ausgetretenen Lichtes:

$$1)\quad \begin{cases} A_1' = -B' = l^2 B;\ B_1' = A' = k^2 A \\ C_1' = -C' = -k\,l\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle); \\ D_1' = D' = +k\,l\,(C\sin\triangle + D\cos\triangle). \end{cases}$$

Nach dem Austritt aus der zweiten Platte ist also:

$$2)\quad \begin{cases} A_1'' = -k^2 l^2 B;\ B_1'' = l^2 k^2 A \\ C_1'' = -k^2 l^2 (C\cos[\triangle - \triangle_1] - D\sin[\triangle - \triangle_1]) \\ D_1'' = +k^2 l^2 (C\sin[\triangle - \triangle_1] + D\cos[\triangle - \triangle_1]) \end{cases}$$

wo $\triangle_1$ sich auf die zweite Platte bezieht. Der Hauptschnitt des Analyseurs, der mit der + x-Axe den $\sphericalangle \omega$ einschliesst, schliesst mit der x_1-Axe den Winkel $\omega - \pi/2$ oder $\omega - 3\pi/2$ ein. Also folgt nach Einschiebung der zweiten Platte, analog den Gleichungen 2) des § XI:

$$E = k_1^2 (A_1'' \sin^2\omega + B_1'' \cos^2\omega - 2 C_1'' \sin\omega\cos\omega)$$
$$= k_1^2 k^2 l^2 (A \cos^2\omega + B \sin^2\omega + 2 (C \cos[\triangle - \triangle_1] - D \sin[\triangle - \triangle_1]) \sin\omega\cos\omega)$$

und analog für O. Ersetzen wir also in unseren Ueberlegungen im § XI. $\triangle$ durch $[\triangle - \triangle_1]$, so werden dieselben strenger richtig. Für einfarbiges Licht können wir sogar jedes Wort des vorigen Paragraphen unverändert lassen, wenn wir $\triangle_1 = 2\pi$ nehmen wollen.

§ XIII. Das Bravais'sche Polariskop.

α) Das Bravais'sche Polariskop beruht auf dem Gedanken, zwei der in § XI. auseinandergesetzten Versuche gleichzeitig und nebeneinander auszuführen. Diesmal nimmt man beidemal dasselbe $\triangle$, aber verschiedene Coordinatensysteme. Der Zweck des Apparates ist die Untersuchung mehrfarbigen (gemischten) Lichtes.

β) Geht Licht $\perp$ durch ein Glimmerspaltungsstück, so geschehen die Schwingungen des ordentlich gebrochenen Strahles $\perp$ zur Ebene der optischen Axen, die des ausserordentlich gebrochenen Strahles in derselben.

Um ein Bravais'sches Polariskop zu erhalten, zerschneidet man ein solches Glimmerblättchen längs einer Ebene, die mit dem Hauptschnitt, d. h. der Ebene der optischen Axen einen $\sphericalangle$ von 45^0 bildet, dreht den einen Theil um und legt beide Theile mit der früheren Schnittfläche aneinander. Die Hauptschnitte beider Theilblättchen sind dann zu einander $\perp$.

Die Parameter des auffallenden Lichtes (A B C D) beziehen wir auf ein solches Coordinatensystem (x y z), dass $C = 0$ und $A < B$. Für $A < B$ ist also die x z-Ebene die Polarisationsebene des auffallenden Lichtes. Ferner seien $(\xi\ \eta\ z)$ und $(\xi\ \eta\ z)$ zwei andere Coordinatensysteme, sodass $\sphericalangle\ \xi\ \xi = \pi/2$ und $\xi\ z$ dem Hauptschnitt des einen Theilblättchens $\parallel$ ist; die ξ z-Ebene ist dann dem Hauptschnitt des anderen Theilblättchens $\parallel$.

Ist $\sphericalangle$ x $\mathfrak{x} = \varphi$, $\triangle$ T : 2π die Verzögerung des ausserordentlichen Strahles im Glimmer, sind endlich k und l die den Grössen k und l der einaxigen Krystalle entsprechenden Grössen beim Glimmer, so folgt für die auf ($\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ z) bezogenen Parameter ($\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{D}'$) des aus dem einen Theilblättchen austretenden Lichtes:

$$1)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}' = k^2 (A \cos^2\varphi + B \sin^2\varphi); \\ \mathfrak{B}' = l^2 (A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi) \\ \mathfrak{C}' = k\,l\,([B - A] \sin\varphi \cos\varphi \cos\triangle - D \sin\triangle) \\ \mathfrak{D}' = k\,l\,([B - A] \sin\varphi \cos\varphi \sin\triangle + D \cos\triangle). \end{cases}$$

Für das aus dem anderen Theilblättchen austretende Licht erhalten wir die auf (ξ η z) bezogenen Parameter (A' B' Γ' Δ'), wenn wir in 1) φ durch $\pi/2 + \varphi$ ersetzen.

γ) Ausser diesem Glimmerblättchen gehört zum Bravais'schen Polariskop noch ein zur Strahlenrichtung $\perp$ gestellter Analyseur, der entweder mit dem Glimmerblättchen fest verbunden, oder gegen die Polarisationsebene des auffallenden Lichtes unveränderlich orientirt ist. In beiden Fällen wird $\sphericalangle$ φ variirt.

Im ersten Falle bildet die Axenprojection des Analyseurs mit der $\mathfrak{x}$-Axe einen constanten $\sphericalangle$ ω, den man $= 45^0$ wählt; im zweiten Fall ist $\sphericalangle$ ω variabel, man wählt $\omega = -\varphi$, d. h. der Hauptschnitt des Analyseurs ist $\parallel$ der x z-Ebene. Der Winkel zwischen der ξ-Axe und der Axenprojection des Analyseurs ist $= \omega - \pi/2$, also im ersten Fall constant mit $= -45^0$, im zweiten Fall variabel $= -(\varphi + \pi/2)$.

Die Intensität des ausserordentlichen Analyseurbildes ist also für das eine Theilblättchen:

$$\mathfrak{E} = k_1^2 (\mathfrak{A}' \cos^2\omega + \mathfrak{B}' \sin^2\omega + 2\,\mathfrak{C}' \sin\omega \cos\omega),$$

für das andere Theilblättchen:

$$E = k_1^2 (A' \sin^2\omega + B' \cos^2\omega - 2\,\Gamma' \sin\omega \cos\omega).$$

Wir erhalten also im ersten Fall ($\omega = 45^0$):

$$2)\quad \mathfrak{E}_I = \tfrac{1}{2} k_1^2 (A [k^2 \cos^2\varphi + l^2 \sin^2\varphi - 2\,k\,l \sin\varphi \cos\varphi \cos\triangle] + B [k^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi + 2\,k\,l \sin\varphi \cos\varphi \cos\triangle] - 2\,k\,l\,D \sin\triangle),$$

und im zweiten Falle ($\omega = -\varphi$):

$$3)\quad \mathfrak{E}_{II} = k_1^2 (A [k^2 \cos^4\varphi + l^2 \sin^4\varphi + 2\,k\,l \sin^2\varphi \cos^2\varphi \cos\triangle] + B [k^2 + l^2 - 2\,k\,l \cos\triangle] \sin^2\varphi \cos^2\varphi + 2\,k\,l\,D \sin\varphi \cos\varphi \sin\triangle].$$

Die entsprechenden Ausdrücke für E_I und E_{II} erhalten wir, wenn wir in 2) und 3) k mit l vertauschen und D durch (— D) ersetzen. Bemerkt sei, dass der mit B multiplicirte

Theil von $\mathfrak{E}_{II}$ bei der Vertauschung von k mit l unverändert bleibt.

δ) Ist das auffallende Licht natürliches Licht, also ausser $C = 0$ noch $A = B$ und $D = 0$, so ist:

$\mathfrak{E}_I \quad E_I = {}^1/_2 k_1^2 A (k^2 + l^2)$

$\mathfrak{E}_{II} \quad k_1^2 A (k^2 \cos^2\varphi + l^2 \sin^2\varphi)$; $E_{II} \quad k_1^2 A (l^2 \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$.

In beiden Fällen zeigen also beide Glimmerhälften die Farbenmischung des einfallenden Lichtes. Während aber im ersten Falle die Intensitäten beider Theile genau gleich sind und nicht mit φ variiren, ist dies im zweiten Falle nur angenähert der Fall.

ε) Ist das affallende Licht circularpolarisirt, also ausser $C = 0$ noch $A = B$, so wird:

$$\mathfrak{E}_I = {}^1/_2 k_1^2 (A [k^2 + l^2] - 2 k l D \sin \triangle)$$
$$E_I = {}^1/_2 k_1^2 (A [k^2 + l^2] + 2 k l D \sin \triangle).$$

$\mathfrak{E}_I + E_I$ ist von $\triangle$ unabhängig; je stärker also eine Farbe in dem einen Theilblättchen vertreten ist, um so schwächer erscheint sie im anderen. Die Färbungen beider Hälften vertauschen sich, wenn D sein Vorzeichen wechselt, d. h. wenn das circularpolarisirte Licht seinen Drehungssinn umkehrt. Die beiden Hälften erscheinen stets ungleich gefärbt; die Farbe eines jeden ist aber von φ unabhängig. Im zweiten Falle ist auch diese Unabhängigkeit von φ nicht mehr vorhanden.

ζ) Ist das auffallende Licht geradlinig polarisirt, also ausser $C = 0$ noch $D = 0$, so beruht der Unterschied beider Theilblättchen allein auf der Vertauschung von k mit l, ist also stets sehr gering. Dieser Unterschied verschwindet im zweiten Falle ganz, für $A = 0$, d. h. wenn das Licht total geradlinig nach der x z-Ebene polarisirt war.

γ) Zur Untersuchung des elliptisch polarisirten Lichtes, zu der das Bravais'sche Polariskop hauptsächlich verwendet wird, giebt man φ einen bestimmten Werth derart, dass die beiden bisher getrennt behandelten Fälle identisch sind. Man wählt also $\varphi = -45^0$, d. h. man nimmt den Hauptschnitt des Analyseurs $\parallel$ der Polarisationsebene des auffallenden Lichtes und diese $\parallel$ der Halbirungsebene des rechten Winkel zwischen den Hauptschnitten der beiden Glimmerhälften. Jetzt wird

natürlich $\mathfrak{E}_I \equiv \mathfrak{E}_{II}$ und $E_I \equiv E_{II}$; ersteres sei mit $\mathfrak{E}$, letzteres mit E bezeichnet. Dann ist:

$$4) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{k_1^2}{2}\left(\frac{A+B}{2}(k^2+l^2) - kl(B-A)\cos\triangle - 2klD\sin\triangle\right) \\ E = \frac{k_1^2}{2}\left(\frac{A+B}{2}(k^2+l^2) - kl(B-A)\cos\triangle + 2klD\sin\triangle\right) \end{cases}$$

Der Unterschied zwischen $\mathfrak{E}$ und E beruht also allein auf dem Gliede, welches D enthält; die Färbungen beider Hälften vertauschen sich, wenn D sein Vorzeichen wechselt; sie werden einander gleich, wenn $D = 0$, d. h. das auffallende Licht geradlinig polarisirt ist.

Hat man nun ein Mittel, die Grösse D, bevor das auffallende Licht das Glimmerblättchen erreicht, in messbarer Weise zu ändern (wie es z. B. mit dem Compensator von Bravais möglich ist), so liefert das Bravais'sche Polariskop ein genaues Mittel, um den ursprünglichen Werth von D zu bestimmen, wenn man z. B. den Moment, in dem $D = 0$ ist, genau erkennen kann. Als Erkennungszeichen dient die in diesem Moment eintretende Gleichheit der beiden Theilblättchen nach Farbe und Intensität. Besonders scharf kenntlich wird dieser Moment, wenn die für $D = 0$ eintretende gleiche Färbung die sogenannte „sensible Farbe" zeigt, d. h. diejenige, für welche die lichtstärksten Strahlen des auffallenden Lichtes, möglichst schwach sind.

Für $D = 0$ wird:

$$\mathfrak{E} = E = \tfrac{1}{2}\, k_1^2\, (\tfrac{1}{2}\,[A+B]\,[k^2+l^2] - k\,l\,[B-A]\cos\triangle),$$

und da $B - A > 0$ ist, muss also bei weissem Licht für die gelbe Farbe $\cos\triangle = +1$, also $\triangle = 2\pi$ gewählt werden. Dann bewirkt selbst ein sehr geringer Werth von D einen merkbaren Effekt auf die sensible Farbe; das eine Theilblättchen erscheint röthlich, das andere bläulich. Wechselt dann D, indem es durch Null hindurchgeht, sein Vorzeichen, so vertauschen sich die Farben der beiden Theilblättchen, indem sie beide für $D = 0$ der sensiblen Farbe gleich werden. Auf diese Weise ist der Moment, in dem $D = 0$ wird, äusserst scharf zu erkennen.

§ XIV. Der Soleil'sche Doppelquarz.

α) Fällt eine Lichtschwingung (a b δ) ⊥ auf eine ⊥ zur Axe geschnittene Quarzplatte, so zerlegt sich dieselbe in zwei circularpolarisirte Schwingungen von einander entgegegesetztem Sinn.

Wir wählen ein Coordinatensystem (x y z), dessen ⊣ z-Axe der Fortpflanzungsrichtung der auffallenden Strahlen ∥ ist, und schreiben die Componenten der auffallenden Schwingung:

1) $x = a \sin [2\pi t : T]; \; y = b \sin ([2\pi t : T] + \delta).$

Die Componenten der Circularstrahlen können wir schreiben:

$x_r = \alpha \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon); \; y_r = \alpha \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon + \pi/2)$

für die Schwingung im Sinne (y ➠ x), und:

$x_1 = \alpha' \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon'); \; y_1 = \alpha' \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon' + 3\pi/2)$

für die Schwingung im Sinne (x ➠ y).

Aus diesen Gleichungen folgt durch Identification:

$$2) \begin{cases} a = \alpha \cos \varepsilon + \alpha' \cos \varepsilon; \\ 0 = \alpha \sin \varepsilon + \alpha' \sin \varepsilon. \\ b \cos \delta = -\alpha \sin \varepsilon + \alpha' \sin \varepsilon'; \\ b \sin \delta = +\alpha \cos \varepsilon - \alpha' \cos \varepsilon'. \end{cases}$$

Beim Durchgang durch die Quarzplatte sei v_r die Geschwindigkeit des Circularstrahles (y ➠ x), v_1 die Geschwindigkeit des Circularstrahles (x ➠ y) und d die Dicke der Flatte; dann braucht der Strahl (y ➠ x) die Zeit

$$\tau = (d : v_r) - (d : v_1)$$

mehr als der Strahl (x ➠ y), um die Platte zu durcheilen. Bezeichnen wir $[2\pi\tau : T]$ mit △ und nehmen an, dass die Amplituden beider Strahlen bei der zweifachen Brechung an den Grenzflächen der Quarzplatte im selben Verhältniss geschwächt werden, so sind die Gleichungen der wiederausgetretenen Circularstrahlen:

$x_r = k\alpha \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon); \; y_r = k\alpha \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon + \pi/2),$

$x_1 = k\alpha' \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon' + \triangle);$

$y_1 = k\alpha' \sin ([2\pi t : T] + \varepsilon' + 3\pi/2 + \triangle).$

Diese geben zusammen eine neue (elliptische) Schwingung (a' b' δ') mit den Componenten:

3) $x = a' \sin ([2\pi t : T] + \eta); \; y = b' \sin ([2\pi t : T] + \eta + \delta')$

wo dann:

$$\begin{aligned} a' \cos \eta &= k (\alpha \cos \varepsilon + \alpha' \cos [\varepsilon' + \triangle]) \\ a' \sin \eta &= k (\alpha \sin \varepsilon + \alpha' \sin [\varepsilon' + \triangle]) \\ b' \cos (\eta + \delta') &= k (-\alpha \sin \varepsilon + \alpha' \sin [\varepsilon' + \triangle]) \\ b' \sin (\eta + \delta') &= k (+\alpha \cos \varepsilon - \alpha' \cos [\varepsilon' + \triangle]) \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt:

$$4)\quad \begin{cases} a'^2 = k^2(\alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos(\varepsilon' - \varepsilon)\cos\triangle \\ \qquad\qquad - 2\alpha\alpha' \sin(\varepsilon' - \varepsilon)\sin\triangle) \\ b'^2 = k^2(\alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos(\varepsilon' - \varepsilon)\cos\triangle \\ \qquad\qquad + 2\alpha\alpha' \sin(\varepsilon' - \varepsilon)\sin\triangle) \\ a'\,b' \cos\delta' = k^2(2\alpha\alpha' \sin(\varepsilon' - \varepsilon)\cos\triangle \\ \qquad\qquad + 2\alpha\alpha' \cos(\varepsilon' - \varepsilon)\sin\triangle) \\ a'\,b' \sin\delta' = k^2(\alpha^2 - \alpha'^2). \end{cases}$$

Nun folgt aus den Gleichungen 2):

$$5)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 = {}^1/_2(a^2 + b^2);\ 2\alpha\alpha' \sin(\varepsilon' - \varepsilon) = a\,b\cos\delta \\ 2\alpha\alpha' \cos(\varepsilon' - \varepsilon) = {}^1/_2(a^2 - b^2);\ \alpha^2 - \alpha'^2 = a\,b\sin\delta. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werthe in 4) ein und bezeichnen, wie gewöhnlich, das einfallende Licht mit (A B C D), dagegen das aus dem Quarz ausgetretene Licht mit ($\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$), so folgt:

$$6)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = {}^1/_2k^2(A + B + (A - B)\cos\triangle - 2C\sin\triangle) \\ \mathfrak{B} = {}^1/_2k^2(A + B - (A - B)\cos\triangle + 2C\sin\triangle) \\ \mathfrak{C} = k^2(C\cos\triangle + {}^1/_2(A - B)\sin\triangle) \\ \mathfrak{D} = k^2 D, \end{cases}$$

worin $\triangle = [2\pi\tau : T]$ Funktion der Farbe ist.

β) Aus den Gleichungen 6) geht hervor, dass ($\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$) stets zu derselben der sieben Lichtklassen gehört wie (A B C D).

War das Licht geradlinig oder elliptisch polarisirt gewesen, und wählen wir die x-Axe $\perp$ zur Polarisationsebene P, so bildet die Polarisationsebene $\mathfrak{P}$ des austretenden Lichtes mit der y-Axe einen $\sphericalangle\,\alpha$, wo:
$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\mathfrak{C} : (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = (A - B)\sin\triangle : (A - B)\cos\triangle = \operatorname{tg}\triangle$
also $\alpha = {}^1/_2\triangle$. Dieser $\sphericalangle\,\alpha$ misst also den Winkel, um den die Polarisationsebene P infolge des Durchgangs des Lichtes durch den Quarz im Sinne x ⤏ y gedreht erscheint, u. s. f.

γ) Bei dem Soleil'schen Doppelquarz hat man zwei gleich dicke Quarzplatten, deren $\triangle$ gleich aber entgegengesetzt sind. Für die eine Platte mögen die Gleichungen 6) gelten; dann hat man für die andere Platte:

$$7)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}' = {}^1/_2k^2(A + B + (A - B)\cos\triangle + 2C\sin\triangle) \\ \mathfrak{B}' = {}^1/_2k^2(A + B - (A - B)\cos\triangle - 2C\sin\triangle) \\ \mathfrak{C}' = k^2(C\cos\triangle - {}^1/_2(A - B)\sin\triangle) \\ \mathfrak{D}' = k^2 D. \end{cases}$$

Geht das Licht, nachdem es durch den Doppelquarz gegangen ist, noch durch einen Analyseur, dessen Axenprojektion

mit der + x Axe den $\sphericalangle$) ω bildet, so entstehen zwei Doppelbilder. Man erhält z. B. für die beiden ausserordentlichen Bilder:

$$8) \begin{cases} \mathfrak{E} = k_1^2 (\mathfrak{A} \cos^2\omega + \mathfrak{B} \sin^2\omega + 2\,\mathfrak{C} \sin\omega\cos\omega) \\ E = k_1^2 (\mathfrak{A}' \cos^2\omega + \mathfrak{B}' \sin^2\omega + 2\,\mathfrak{C}' \sin\omega \cos\omega). \end{cases}$$

δ) Zunächst bemerken wir, dass D in Gleichung 8) nicht vorkommt; wir dürfen also auch aus der Beobachtung von $\mathfrak{E}$ und E keinen Aufschluss darüber erwarten, ob $D \lessgtr 0$ ist.

ε) Sind beide ausserordentlichen Bilder von der Farbenmischung des einfallenden Lichtes, so müssen $\mathfrak{E}$ und E von $\triangle$ unabhängig sein. Daraus folgt:

$$(A - B) \cos 2\omega + 2\,C \sin 2\omega = 0;$$
$$(A - B) \sin 2\omega - 2\,C \cos 2\omega = 0,$$

also $A = B$ und $C = 0$. Das Licht war also natürliches Licht oder circularpolarisirt.

ξ) Sind beide Bilder unter einander von gleicher Färbung, so muss der Quotient $E : \mathfrak{E}$ von $\triangle$ unabhängig sein. Für $\triangle = 0$ ist $E = \mathfrak{E}$. Also muss für jedes $\triangle : E = \mathfrak{E}$ oder $E - \mathfrak{E} = 0$ sein. Also folgt:

$(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}) \cos^2\omega + (\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}) \sin^2\omega + 2\,(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) \sin\omega \cos\omega = 0.$

Hieraus ergiebt sich, wenn nicht ε) vorliegt:

$$\operatorname{tg} 2\omega = 2\,C : (A - B).$$

Also ist $\sphericalangle\,\omega = \sphericalangle$ x P oder $\sphericalangle$ y P des einfallenden Lichtes.

In dieser Relation liegt die Bedeutung des Soleil'schen Doppelquarzes, der dazu dient, die Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes zu bestimmen. Um die Einstellung auf Farbengleichheit möglichst scharf zu machen, wählt man die Dicke d so, dass für die lichtstärksten Strahlen (bei weissem Licht für die gelben) $\triangle = \pi$, also $\tau = \frac{1}{2}\,T$ ist. Für diese Strahlen ist $\mathfrak{E}$ und E ein Minimum, sobald $\sphericalangle\,\omega = \sphericalangle$ y P wird. Die für diesen Winkel eintretende gleiche Färbung beider Bilder ist also mit dem Auftreten der „sensibeln" Farbe verbunden, und ist deshalb äusserst genau zu erkennen. Denn die geringste Aenderung des $\sphericalangle\,\omega$ zerstört die gleiche Färbung der beiden Bilder, indem z. B. für einfallendes weisses Licht das eine roth, das andere blau wird.

η) Haben wir einen der üblichen Soleil'schen Doppelquarze, für den also für die gelben Strahlen $\triangle = \pi$ ist, so ist mit

demselben die Einstellung auf Farbengleichheit für Licht, in welchem die gelben Strahlen schwach sind, weniger scharf, weil wir nicht die sensible Farbe erhalten. Ebenso geht die Präcision des Instruments für einfarbiges, nicht gelbes Licht verloren.

ϑ) Um diesen Nachtheil zu vermeiden, combiniren wir vier Quarzprismen derart, dass je zwei von ihnen eine Hälfte eines Soleil'schen Doppelquarzes von variabler Dicke bilden. Zwei dieser Quarzprismen, deren Δ positiv ist, sind aus einer dickeren, rechteckigen, zur Axe $\perp$ geschnittenen Quarzplatte vermittelst eines Diagonalschnittes hergestellt, der der Axe nicht $\parallel$ ist. Durch Verschiebung beider Prismen längs des Diagonalschnittes gegeneinander, kann man die Dicke der planparallelen, $\perp$ zur Axe geschnittenen Platte, die beide Platten gemeinsam bilden, stets so zu verändern, dass Δ für irgend eine vorgeschriebene Farbe $= \pi$ ist. Für die beiden anderen Quarzprismen gilt genau das Gleiche, nur ist hier Δ negativ. Indem man nun die entsprechenden Prismen beider Paare so mit einander fest verbindet, dass Δ stets für beide Paare gleich und entgegengesetzt ist, hat man in dem planparallelen Theile dieses Apparates einen Soleil'schen Doppelquarz von variabler Dicke. Um leicht die richtige Einstellung dieses Prismensystem zu finden, lässt man in einem Vorversuch das zu untersuchende Licht durch einen Nikol gehen, stellt den Hauptschnitt des Analyseurs dem des Nikols $\parallel$ und richtet das Prismensystem so, dass die sensible Farbe erscheint. Nimmt man dann den Nikol fort, so hat man das gewünschte Polariskop.

2. Polariskope für convergentes Licht.

§ XV. Die einaxige, senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte mit Analyseur.

α) Wir stellen die Krystallplatte so, dass die mittlere Fortpflanzungsrichtung des auffallenden convergenten Lichtes mit der Plattennormale, also auch mit der Krystallaxe zusammenfällt, und nehmen diese Richtung zur $\perp$ z-Axe eines sonst beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems (x y z). Die in § II δ) genannten Bedingungen fordern, dass alle Strahlenrichtungen S des convergenten Lichtes mit der z-Axe

sehr kleine $\sphericalangle$ i bilden und dass die auf (x y z) bezogenen Parameter (A B C D) des in der mittleren Strahlenrichtung auffallenden Lichtes zugleich die auf (x y z) bezogenen Parameter jeder anderen Strahlenrichtung S darstellen.

β) Um für eine Strahlenrichtung S, welche nicht genau $\parallel$ z ist, die Gleichungen § II. 3) und § IV. 3) anwenden zu können, müssen wir zuvor die Parameter (A B CD) auf ein anderes Coordinatensystem (x_s y_s z) beziehen, dessen $+ x_s$-Axe der Projektion der Strahlenrichtung S auf die vordere Krystallfläche $\parallel$ ist. Setzen wir $\sphericalangle$ x $x_s = \sigma$, sodass also den Strahlen einer bestimmten Einfallsebene ein bestimmter Werth von σ entspricht, so ist:

$$1) \begin{cases} A_s = A \cos^2\sigma + B \sin^2\sigma + 2\,C \sin\sigma \cos\sigma \\ B_s = A \sin^2\sigma + B \cos^2\sigma - 2\,C \sin\sigma \cos\sigma \\ C_s = C (\cos^2\sigma - \sin^2\sigma) - (A - B) \sin\sigma \cos\sigma \\ D_s = D. \end{cases}$$

Im vorliegenden Fall, wo Krystallaxe und Flächennormale zusammenfallen, wird $k = 1$. Nach dem Austritt aus der Platte sind also die zur Strahlenrichtung S gehörigen Parameter, bezogen auf (x_s y_s z):

$$2) \begin{cases} A'_s = k^2 A_s \\ B'_s = k^2 B_s \\ C'_s = k^2 (C_s \cos \triangle = D_s \sin \triangle) \\ D'_s = k^2 (C_s \sin \triangle + D_s \cos \triangle), \end{cases}$$

wo nach § II. γ):

$$3) \quad \triangle = 2\,\pi\,d \sin i\,(\mathrm{ctg}\, r_e - \mathrm{ctg}\, r_o) : v\,T$$

zu setzen ist.

Geht dies Licht nun durch einen Analyseur, dessen Axenprojektion $\parallel$ der + x-Axe ist, so erhalten wir z. B. für die Intensität $\mathfrak{E}$ des ausserordentlichen Bildes, da $\sphericalangle$ x_s x $= -\sigma$ ist:

$$4) \quad \mathfrak{E} = k_1^2 k^2 (A_s \cos^2\sigma + B_s \sin^2\sigma - 2\,C_s \sin\sigma \cos\sigma \cos\triangle + 2\,D_s \sin\sigma \cos\sigma \cos\triangle).$$

Für $i = 0$ ist $\triangle$ für alle Farben = Null und folglich $\mathfrak{E} = k_1^2 k^2 A$.

γ) Um $\mathfrak{E}$ für alle verschiedenen Richtungen S gleichzeitig beobachten zu können, lassen wir das aus dem Analyseur kommende Licht so durch eine Sammellinse gehen, dass allen Strahlenrichtungen S von gleichem i die Punkte eines Kreises

K_i als Bildpunkte entsprechen, und das Kreiscentrum der der Richtung ($i = 0$) entsprechende Punkt ist. Strahlenrichtungen S von gleichem σ entsprechen in der Fokalebene Geraden, die durch dies Centrum gehen.

δ) Aus der Symmetrie um die Plattennormale, die zugleich Krystallaxe ist, folgt, dass $\triangle$ für ein bestimmtes i nur von der Farbe, aber nicht von σ abhängt.

ε) Aus Gleichung 4) folgt:

5) $$\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,\triangle} = 2\,k_1^2\,k^2 \sin\sigma\cos\sigma\,(C_s \sin\triangle + D_s\cos\triangle)$$ und:

6) $$\frac{d^2\,\mathfrak{E}}{d\,\triangle^2} = k_1^2\,k^2 \sin\sigma\cos\sigma\,(C_s\cos\triangle - D_s\sin\triangle).$$

Wird also für einen bestimmten Strahl S, d. h. für bestimmte Werthe von σ und i_1:

$$\sin\sigma\cos\sigma\,(C_s\sin\triangle + D_s\cos\triangle) = 0$$

für den Werth $\triangle = \triangle'$, so ist in dem S entsprechenden Punkte der Fokalebene die $\triangle'$ entsprechende Farbe im Maximum oder Minimum, je nachdem:

$$\sin\sigma\cos\sigma\,(C_s\cos\triangle' - D_s\sin\triangle') < \text{oder} > 0 \text{ ist.}$$

ζ) Zunächst sehen wir aus Gleichung 5), dass $\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,\triangle}$ unabhängig von $\triangle = 0$ ist, für $\sin\sigma\cos\sigma = 0$. Dann ist aber nach Gleichung 4) und 1): $\mathfrak{E} = k_1^2\,k^2\,A$. Wir erhalten mithin stets in der Fokalebene zwei aufeinander senkrechte Geraden von der Farbenmischung des einfallenden Lichtes, ausser wenn $A = 0$, d. h. das einfallende Licht total geradlinig in der x z-Ebene polarisirt war.

η) Ist $\sin\sigma\cos\sigma \neq 0$, so ist nach Gleichung 5) $\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,\triangle} = 0$ für $\operatorname{tg}\triangle' = -D_s : C_s = -D : C_s$. Von besonderem Interesse sind die Fälle, wo die rechte Seite dieser Gleichung von σ unabhängig ist: denn dann erhalten wir auf jedem Kreise K_i so lange dieselbe Färbung, wie

$$\sin\sigma\cos\sigma\,(C_s\cos\triangle' - D_s\sin\triangle')$$

sein Vorzeichen nicht ändert, dagegen beim Wechseln des Vorzeichens einen sprungweisen Uebergang zur complementären Färbung.

ϑ) Für elliptisch polarisirtes Licht ist $(-D : C_s)$ von σ abhängig, da weder $D = 0$ noch C_s von σ unabhängig ist.

Wir erhalten also auf jedem Kreise K_i die Farbe von Punkt zu Punkt (d. h. mit σ) wechselnd.

ι) Für geradlinig polarisirtes Licht ist $D = 0$, C_s abhängig von σ, also $(-D : C_s)$ unabhängig von σ. Wird erhalten also Kreisbogen der Kreise K_i in konstanter Färbung. Auf jedem Kreise springt die Farbe an denjenigen Stellen in die complementäre über, für welche $\sin\sigma\cos\sigma\, C_s$ das Vorzeichen wechselt. Dies tritt ein, wenn entweder $\sin\sigma\cos\sigma = 0$ wird (siehe ζ), aber $C_s \neq 0$ ist, oder $C_s = 0$ wird, während $\sin\sigma\cos\sigma \neq 0$ ist, dagegen nicht, wenn C_s und $\sin\sigma\cos\sigma$ für dasselbe σ verschwinden. Die Gleichung $C_s = 0$ sagt, dass die diesem Werthe von σ entsprechende Gerade der Fokalebene $\parallel$ oder $\perp$ zur Polarisationsebene des einfallenden geradlinig polarisirten Lichtes ist; denn aus Gleichung 1) folgt: $\operatorname{tg} 2\sigma = 2C : (A - B)$. (§ IV. β. 2.) Wir erhalten also in der Fokalebene ein rechtwinkliges Kreuz, welches zusammen mit dem Kreuz ($\sin\sigma\cos\sigma = 0$) jeden Kreis K_i in 8, zu je 4 gleiche Theile theilt, von denen je zwei benachbarte complementär gefärbt sind.

Nur wenn das einfallende Licht $\parallel$ oder $\perp$ zur x z-Ebene polarisirt ist, sodass also zugleich C_s und $\sin\sigma\cos\sigma = 0$ werden, entsteht nur ein einziges Kreuz in der Fokalebene, an welchem dann aber kein Wechsel der Farben längs der Kreise K_i eintritt. War das einfallende Licht total nach der x z-Ebene polarisirt, also $A = 0$, so wird dieses einzige Kreuz schwarz: sonst zeigt es die Farbenmischung des einfallenden Lichtes.

$\varkappa$) Für circularpolarisirtes Licht ist $D \neq 0$, aber C_s unabhängig von σ, nämlich $= 0$. Also ist auch $(-D : C_s)$ von σ unabhängig.

Der Ausdruck:

$$\sin\sigma\cos\sigma\,(C_s\cos\triangle' - D\sin\triangle') = -\sin\sigma\cos\sigma\, D\sin\triangle'$$

wechselt nur zugleich mit $\sin\sigma\cos\sigma$ sein Vorzeichen. Wir erhalten demnach die Fokalebene in 4 Quadranten getheilt, durch die $\sigma = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ entsprechenden Geraden, und auf jedem Kreise K_i in zwei benachbarten Quadranten constante, complementäre Färbung. Die Geraden des Quadrantenkreuzes sind allein infolge des sprungweisen Ueberganges zwischen den Complementärfarben erkennbar.

Zwei im entgegengesetzten Sinne circularpolarisirte Lichtarten geben zwei einander durchaus complementäre Farbenanordnungen in der Fokalebene, so dass wir den Schwingungssinn des gegebenen circularpolarisirten Lichtes feststellen können, wenn uns eine circularpolarisirte Lichtart von bekanntem Schwingungssinn zum Vergleich geboten ist.

λ) Für natürliches Licht ist $A = B$, $C = 0$, $D = 0$; für jeden Punkt der Fokalebene ist:

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2\, k_1{}^2\, k^2\, (A + B) = k_1{}^2\, k^2\, A$$

unabhängig von $\triangle$. Die ganze Fokalebene erscheint also von der Färbung des einfallenden Lichtes.

§ XVI. Die Savart'sche Platte.

α) Die Savart'sche Platte besteht aus zwei hinter einander gelegten Quarzplatten q_1 und q_2, deren Hauptschnitte auf einander $\perp$ stehen; beide Platten sind unter dem gleichen $\sphericalangle r$ gegen die optische Axe geschnitten und von gleicher Dicke.

Durch einen Punkt der Vorderfläche von q_1 legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen $+$ z-Axe $\parallel$ der Fortpflanzungsrichtung der mittleren Strahlenrichtung des convergenten Lichtes, also nach § II. δ) $\parallel$ der Plattennormale von q_1 nach q_2. (A B C D) seien die Parameter der mittleren Strahlenrichtung und somit aller betrachteten. Um die Gleichungen § II. 3) und § IV. 3) auf irgend eine Strahlenrichtung S anwenden zu können, müssen wir (A B C D) auf ein neues Coordinatensystem $(x_s\ y_s\ z)$ beziehen, dessen x_s-Axe in der Ebene liegt, die S mit der optischen Axe verbindet. Diese Ebene kann aber, wegen der Kleinheit der in Betracht kommenden $\sphericalangle i$, sobald r einigermassen gross ist, für alle S als identisch angesehen werden mit der Projektionsebene der optischen Axe von q_1 auf die Vorderfläche von q_1. Die Schnittgerade dieser beiden Ebenen nehmen wir daher zur x-Axe.

Analog beziehen wir die Parameter aller Strahlenrichtungen vor dem Durchgang des Lichtes durch q_2 auf ein neues Coordinatensystem $(x_1\ y_1\ z)$, dessen x_1-Axe mit der Axenprojektion von q_2 auf die Vorderfläche von q_2 zusammenfällt.

Die Werthe von k und l endlich sind für q_1 und q_2 dieselben, da beide Platten gleich orientirt sind.

Wir erhalten nach dem Austritt aus q_1:

$$1)\quad \begin{cases} A' = k^2 A \\ B' = l^2 B \\ C' = k\,l\,(C\cos\triangle_1 - D\sin\triangle_1) \\ D' = k\,l\,(C\sin\triangle_1 + D\cos\triangle_1), \end{cases}$$

wo $\triangle_1$ Funktion der Farbe und der Richtung S ist (§ II. γ). Vor dem Eintritt in q_2 haben wir also, bezogen auf $(x_1\ y_1\ z)$:

$$2)\quad \begin{cases} A'_1 = l^2 B \\ B'_1 = k^2 A \\ C'_1 = -k\,l\,(C\cos\triangle_1 - D\sin\triangle_1) \\ D'_1 = k\,l\,(C\sin\triangle_1 + D\cos\triangle_1), \end{cases}$$

da $\sphericalangle\, x\, x_1 = \pi/2$ oder $3\,\pi/2$ ist.

Hieraus folgt nach dem Austritte aus q_2, bezogen auf $(x_1\ y_1\ z)$:

$$3)\quad \begin{cases} A''_1 = k^2 l^2 B \\ B''_1 = k^2 l^2 A \\ C''_1 = -k^2 l^2 (C\cos[\triangle_2 - \triangle_1] + D\sin[\triangle_2 - \triangle_1]) \\ D''_1 = -k^2 l^2 (C\sin[\triangle_2 - \triangle_1] - D\cos[\triangle_2 - \triangle_1]). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen variirt nur die Differenz $[\triangle_2 - \triangle_1]$ mit der Farbe und der Richtung S. Wir bezeichnen $\triangle_2 - \triangle_1$ mit $\triangle$. Endlich lassen wir das Licht, nachdem es q_2 verlassen hat, durch einen Analyseur gehen, dessen Axenprojektion mit der x_1-Axe den $\sphericalangle\, \omega$ bildet. Dann ist z. B. die Intensität des ausserordentlichen Bildes:

$$4)\quad \mathfrak{E} = k_1^2 k^2 l^2 (B\cos^2\omega + A\sin^2\omega - 2\sin\omega\cos\omega\,[C\cos\triangle + D\sin\triangle]).$$

In diesem Ausdruck sind $\cos\triangle$ und $\sin\triangle$ die einzigen Grössen, die mit der Richtung S variiren.

Um alle Strahlenrichtungen S gleichzeitig beobachten zu können, verwenden wir wiederum eine Sammellinse, analog wie im vorigen Paragraphen.

β) In der Fokalebene dieser Sammellinse entsprechen nach Gleichung 4) solchen Strahlenrichtungen S, für die $\cos\triangle$ und $\sin\triangle$ dieselben Werthe haben, Linien gleicher Intensität einer bestimmten Farbe.

Wir setzen $\sphericalangle v = 45^0$ und bezeichnen den Winkel zwischen der Einfallsebene von S und der x z-Ebene mit σ; dann folgt:*)

$$5)\ \triangle = C \sin i (\cos \sigma - \sin \sigma) : T,$$

wo C eine Constante des Krystalles und T die Schwingungsdauer der betreffenden Farbe bedeutet.

Die Strahlenrichtungen von gleichem cos $\triangle$ und sin $\triangle$ genügen also der Gleichung:

$$C \sin i (\cos \sigma - \sin \sigma) : T = \triangle + n \pi,$$

oder:

$$6)\ \sin i (\cos \sigma - \sin \sigma) = (\triangle T + 2 n \pi T) : C),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

Wir drehen das Coordinatensystem (x y z) um -45^0 in die Lage (x' y' z) und setzen:

$$\varkappa = i - \pi/2;\ \sigma' = \sigma + \pi/2;$$

dann ist:

$$\sin i = \cos \varkappa;\ (\cos \sigma - \sin \sigma) = \cos \sigma' \sqrt{2}.$$

Die Gleichung 6) geht also über in:

$$7)\ \cos \varkappa \,.\, \cos \sigma' = (\triangle T : C \sqrt{2}) + (n \pi T \sqrt{2} : C).$$

Diese Gleichung stellt eine Schaar von Flächen F_n dar von der Form:

$$8)\ \cos \varkappa \,.\, \cos \sigma' = c_n.$$

Genügt für ein bestimmtes $\varkappa$ ein Werth σ' dieser Gleichung 8), so genügt ihr auch $(-\sigma')$; dasselbe gilt für ein bestimmtes σ' von $\varkappa$. Also ist sowohl die Ebene $\sigma' = 0$, d. h. die x' z-Ebene, also auch die Ebene $\varkappa = 0$, d. h. die x' y'-Ebene Symmetrieebene von F_n.

Die in der einen dieser Symmetrieebene gelegenen Strahlen von F_n bilden denselben Winkel $(= 2 \arccos c_n)$ mit einander, wie die in der anderen gelegenen. Beide Winkel werden durch die x'-Axe halbirt. F_n ist also ein Kreiskegel um die x'-Axe. Von den Strahlen dieses Kegels F_n kommt hauptsächlich der Strahl S_n in Betracht, der der — z-Axe zunächst liegt, für den also $\varkappa$ den grösstmöglichen negativen Werth hat. Diesem Werth von $\varkappa$ entspricht ein Maximum von cos σ', d. h. (wenn

*) Verdet (Exner) II. S. 145.

c_n positiv ist) der Werth $\sigma' = 0$; S_n liegt also in der x′ z-Ebene und der zugehörige Werth von $\varkappa$ ist die negative Wurzel der Gleichung $\cos k = c_n$.

Ausser S_n kommen für uns nur solche Strahlen von F_n in Betracht, die S_n äusserst nahe liegen; von diesen können wir annehmen, dass sie nahezu in der durch S_n an F_n gelegten Tangentialebene T_n liegen. Da aber S_n in der x′ z-Ebene, also in einer Symmetrieebene von F_n liegt, so steht T_n auf der x′ z-Ebene $\perp$ und geht mithin durch die y′-Axe. Die in Betracht kommenden Strahlen der Kegelschaar (Gleichung 7) liegen alse in einer Ebenenschaar, deren Axe die y′-Axe, d. h. die Winkelhalbirende des $\sphericalangle$ x y ist. Die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Ebenen dieser Schaar sind um so kleiner. je kleiner die entsprechende Aenderung von c_n, d. h. je kleiner $(n\,T\,\sqrt{2} : C)$, je kleiner also T ist.

In der Fokalebene werden mithin die Linien gleicher Intensitat einer bestimmten Farbe Paralellen zur Winkelhalbirenden des $\sphericalangle$ x y sein; die Abstände zwischen diesen Paralellen werden um so kleiner sein, je kleiner T ist.

γ) Bei einfarbigem Licht erhalten wir also in der Fokalebene ein Streifensystem von wechselnder Intensität, paralell der Geraden x = y. Für gemischtes Licht decken sich die Streifensysteme der verschiedenen einfarbigen Bestandtheile übereinander, und es entsteht ein Streifensystem von wechselnder Färbung. Die Gerade x = y selbst ist von der Farbenmischung des einfallenden Lichtes, da $\triangle$ dort für alle Farben verschwindet.

Für eine der paralellen Geraden, die durch ihren Abstand von der Geraden x = y bestimmt werden möge, ist diejenige Farbe nach Gleichung 4) im Maximum resp. Minimum, für welche

$$\mathrm{tg}\,\triangle' = D : C$$

ist, je nachdem zugleich:

$$2 \sin\omega \cos\omega\,(C \cos\triangle + D \sin\triangle) < 0 \text{ ist oder } > 0.$$

δ) Dreht man das mit dem Analyseur fest verbundene Plattenpaar q_1 und q_2 um die z-Axe und mit ihm das Coordinatensystem (x y z), so dreht sich auch die Gerade x = y,

und also das ganze Streifensystem der Fokalebene. $\triangle$ behält bei dieser Drehung für einen bestimmten Streifen und eine Farbe seinen Werth bei; aber in der Gleichung 4) werden A, B und C und damit $\mathfrak{E}$ den Werth ändern.

ε) Soll nun das Farbenbild der Fokalebene ungeändert an der Drehung des Polariskopes theilnehmen, so muss nach γ) (D : C) seinen Werth und $(C \cos \triangle + D \sin \triangle)$ sein Vorzeichen während der Drehung beibehalten. Also haben wir die drei Möglichkeiten, auf die (D : C) constant bleiben könnte, daraufhin zu untersuchen, ob $(C \cos \triangle + D \sin \triangle)$ sein Vorzeichen ändert oder nicht.

ζ) Ist $D = 0$ und C während der Drehung constant, so folgt nach § IV. β. 1), wo C_1 unserem durch die Drehung veränderten C entspricht, $C = 0$ und $A = B$; wir haben also natürliches Licht. Die Intensität $\mathfrak{E}$ ist für alle Strahlenrichtungen und alle Farben dieselbe $= k_1^2 k^2 l^2 A$; die ganze Fokalebene erscheint in der Farbenmischung des auffallenden Lichtes.

η) Ist C constant, also $C = 0$ und $A = B$, dagegen $D \neq 0$, das Licht also circularpolarisirt, so wird:

$$C \cos \triangle + D \sin \triangle = D \sin \triangle,$$

und bleibt also, ebenso wie D ($= D_1$ in § IV. β. 1.) während der Drehung des Polariskops ungeändert. Das Farbenbild der Fokalebene folgt der Drehung ohne Farbenwechsel.

Für zwei im entgegengesetzten Sinne circularpolarisirte Lichtarten sind die Erscheinungen complementär.

ϑ) Ist $D = 0$ und C veränderlich, so ändert

$$D \sin \triangle + C \cos \triangle = C \cos \triangle$$

in vier je um eine Vierteldrehung von einander getrennten Lagen das Vorzeichen, indem C durch Null hindurchgeht (§ XV. ι.). Das einfallende Licht ist geradlinig polarisirt; in jenen vier Stellungen des Polariskops, für die das Farbenbild der Fokalebene in das complementäre übergeht, ist der Hauptschnitt von q_1 $\parallel$ oder $\perp$ zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Im Augenblick des Ueberganges erscheint die ganze Fokalebene von der Farbenmischung des einfallenden Lichtes und überall gleich hell (Gleichung 4). Dreht man das

Polariskop aus einer Uebergangslage in die nächste, so nimmt die Schärfe des Farbenbildes in der Fokalebene stetig zu bis zur Mitte der Drehung; in dieser Lage ist dann die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes ∥ oder ⊥ zur Richtung des Streifensystems.

ι) Ist weder D = 0 noch C unveränderlich, das einfallende Licht also elliptisch polarisirt, so ändert sich das Farbenbild der Fokalebene während der Drehung fortwährend; auch kann das Streifensystem für keine Lage des Polariskops verschwinden.

ϰ) Alle vorstehenden Betrachtungen werden hinfällig, sobald $\sin\omega\cos\omega = 0$ ist, da dann $\mathfrak{E}$ von $\triangle$ unabhängig wird. Wir müssen also die Werthe von $\omega = 0,\ \pi/2,\ \pi$ und $3\,\pi/2$ verbieten.

Wollen wir möglichst deutliche Farbenbilder erhalten, so müssen wir in Gleichung 4) den von $\triangle$ unabhängigen Ausdruck möglichst gross machen; wir werden deshalb $\sin 2\,\omega = \pm 1$, also $\omega = \pi/4,\ 3\,\pi/4$ wählen. Dieser Wahl entsprechen auch die gebräuchlichen Savart'schen Polariskope.

C. Polarimeter.

§ XVII. Aufgabe des Polarimeters.

α) Die Aufgabe des Polarimeters ist die Bestimmung der Grösse $Q = +\sqrt{[(A - B)^2 + 4\,(C^2 + D^2)]} : (A + B)^2$ (§ VI. ζ), d. h. des Verhältnisses des totalpolarisirten Antheils zum natürlichen Antheil im partiell polarisirten Licht. Setzen wir:

$$4\,(C^2 + D^2) : (A - B)^2 = V \text{ und } B : A = W,$$

so folgt:

$$1)\ Q = +\sqrt{(1 + V)\,(1 - W)^2 : (1 + W)^2}.$$

Es ist also nur nöthig, V und W zu bestimmen.

β) Lassen wir das Licht (A B C B) nach einander durch zwei planparalelle Krystallplatten von gleicher Substanz und Orientirung, deren Hauptschnitte auf einander ⊥ stehen, senk-

recht hindurchgehen, so ist, wenn der Hauptschnitt der ersten Platte ‖ der x z-Ebene ist, entsprechend den Gleichungen § XII. 2) nach dem Austritt des Lichtes:

$$2)\quad \begin{cases} A'' = k^2 l^2 A \\ B'' = k^2 l^2 B \\ C'' = k^2 l^2 (C \cos[\triangle - \triangle_1] - D \sin[\triangle - \triangle_1] \\ D'' = k^2 l^2 (C \sin[\triangle - \triangle_1] + D \cos[\triangle - \triangle_1], \end{cases}$$

also:

$$C''^2 + D''^2 = k^4 l^4 (C^2 + D^2)$$

und folglich:

$$V'' = V,\ W'' = W,\ Q'' = Q.$$

Man kann also für eine bestimmte zu untersuchende Farbe und Strahlenrichtung, falls $D \neq 0$ ist, das Licht (A B C D) durch passende Wahl von $[\triangle - \triangle_1]$ ohne Veränderung von Q in Licht (A'' B'' C'' D'') verwandeln, für welches $D'' = 0$ ist, d. h. in geradlinig polarisirtes Licht.

Ferner kann man stets das Licht (A'' B'' C'' D'') auf ein solches Coordinatensystem (x_1 y_1 z) beziehen, dass $C_1'' = 0$ wird, während natürlich $D_1'' = D'' = 0$ bleibt. $C_1'' = 0$ bedeutet, dass die x_1 z-Ebene ‖ oder ⊥ zur Polarisationsebene des Lichtes steht und diese Stellung wird mit Hilfe irgend eines Polariskopes bestimmt. Selbstverständlich ist $Q_1'' = Q''$, also auch $= Q$.

Mithin können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, wenigstens für die Untersuchung paralellen, einfarbigen Lichtes, die Theorie der Polarimeter auf solches Licht (A B C D) beschränken, für das $C = 0$ und $D = 0$ ist.

γ) In diesem Falle wird $V = 0$ und also:

$$Q = \tfrac{1}{2}(1 - W)^2 : (1 + W)^2 = \tfrac{1}{2}(A - B)^2 : (A + B)^2.$$

Als wesentlich polarimetrische Aufgabe bleibt also die Bestimmung von W.

δ) Die beiden Polarimeter, welche wir beschreiben werden, leisten die Bestimmung von W dadurch, dass sie das auffallende Licht (A B C D), für welches $C = 0$ und $D = 0$ ist, so in Licht (A' B' C' D'), für welches ebenfalls $C' = 0$ und $D' = 0$ ist, verwandeln, dass die Faktoren α und β der Gleichungen:

$$A' = \alpha A;\ B' = \beta B$$

mit der Einstellung des Polarimeters in messbarer Weise variiren. Gelings es dann $A' = B'$ zu machen, so liefern die dieser Stellung des Polarimeters entsprechenden Werthe α' und β' von α und β die Grösse W vermittelst der Gleichung:

$$W = B : A = \alpha' : \beta'.$$

Die Fixirung der Polarimeterstellung, für welche $A' = B'$ wird, kann aufs Genaueste mittelst eines Polariskopes geschehen, da $(A' B' C' D')$ natürliches Licht wird.

War D ursprünglich bereits $= 0$, so kann man auch Polariskope für convergentes Licht benutzen; wurde dagegen D erst durch Verwandlung in D'' zu Null, was stets nur für für eine Strahlenrichtung möglich ist, so sind allein Polariskope für $\parallel$ Licht anwendbar.

§ XVIII. Wild's erster Polarimeter.

α) Geht eine Lichtschwingung $(a_k\, b_k\, \delta_k)$ durch m paralelle planparalelle Glasplatten, deren Flächen im Verhältnis zu ihren Dicken und gegenseitigen Abständen sehr gross sind, so erhalten wir, wenn i den Incidenzwinkel und r den Brechungswinkel bezeichnet, für das aus dieser „Glasplattensäule" austretende Licht $(a'_k\, b'_k\, \delta'_k)$*):

$$1) \quad \begin{cases} a'_k{}^2 = a_k{}^2 (1 - \sigma^2) : (1 + [2\,m - 1]\sigma^2) = a_k{}^2 s^2 \\ b'_k{}^2 = b_k{}^2 (1 - \tau^2) : (1 + [2\,m - 1]\tau^2) = b_k{}^2 t^2, \end{cases}$$

wo:

$$\sigma = \sin(i - r) : \sin(i + r);\ \tau = \operatorname{tg}(i - r) : \operatorname{tg}(i + r)$$

ist. Dabei ist x $\parallel$ der Einfallsebene.

Sind also $(A\,B\,C\,D)$ und $(A'\,B'\,C'\,D')$ die Parameter des unter dem Incidenzwinkel i einfallenden und austretenden Lichtes, so ist:

$$2) \quad \begin{cases} A' = s^2 A \\ B' = t^2 B \\ C' = \pm\, V s^2 t^2\, C \\ D' = \pm\, V s^2 t^2\, D. \end{cases}$$

β) In dem Wild'schen Apparat befindet sich eine solche solche Glasplattensäule. Der ganze Apparat ist um die

*) Neumann: Theoretische Optik, S. 148.

mittlere Strahlenrichtung drehbar: die Säule ausserdem im Apparat um die y-Axe.

Vorausgesetzt sei, dass $D = 0$ ist, d. h. geradlinig polarisirtes Licht.

Zunächst drehen wir den ganzen Apparat so, dass für die x z-Ebene, d. h. für die Einfallsebene der Glasplattensäule, $C = 0$ ist. Es folgt dann aus Gleichung 2), dass auch $D' = 0$ und $C' = 0$ ist. Darauf dreht man die Glassäule im Apparat und variirt dadurch den $\sphericalangle i$ und mit diesem σ^2 und τ^2, s^2 und t^2.

Wenn es nun gelingt, für einen bestimmten Werth i' von i $A' = B'$, das austretende Licht also zu natürlichem Lichte zu machen, so hat man, wenn s' und t' die $\sphericalangle i'$ entsprechenden Werthe von s und t bezeichnen:

$$W = B : A = s'^2 : t'^2,$$

also:

$$3)\quad Q = + V(t'^2 - s'^2)^2 : (t'^2 + s'^2)^2.$$

γ) Als Bedingung für die Möglichkeit der Gleichung: $A' = B'$ ergiebt sich: B nicht $> A$; denn es lässt sich zeigen, dass: $0 < (s^2 : t^2) < 1$ ist. Die Bedingung: B nicht $> A$ bedeutet hier, da $C = 0$ ist, dass die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der y z-Ebene, und nicht mit der x z-Ebene zusammenfallen soll.

§ XIX. Wild's zweiter Polarimeter.

α) Zwei natürliche Kalkspatrhomboeder ϱ und ϱ' seien so hinter einander gestellt, dass ihre Axenprojektionen x und x' einen $\sphericalangle x x' = \pi$ mit einander bilden.

Die + z-Axe der Coordinatensysteme (x y z) und (x' y' z) sei $\parallel$ der auf der rhombischen Fläche von ϱ nach ϱ' hin errichteten Normalen.

Zwischen beiden Rhomboedern befindet sich ein polarisirendes Prisma, dessen Sehaxe $\parallel$ der z-Axe ist und das um diese Axe gedreht werden kann. Endlich ist vor dem ersten Rhomboeder ϱ ein undurchsichtiger Schirm mit einer Oeffnung von veränderlicher Grösse; bei hinreichender Dicke von ϱ liefert dann ϱ zwei vollkommen getrennte Bilder der Oeffnung, ohne dass wir dieselbe allzu sehr verkleinern müssen.

β) Fällt eine Lichtschwingung (a b δ) nach Passiren der Schirmöffnung $\parallel$ auf ϱ auf, so erhalten wir beim Austritt aus ϱ zwei räumlich getrennte, geradlinig polarisirte Schwingungen:

$$a_e = k\,a,\quad b_e = 0$$

und

$$a_o = 0,\quad b_o = l\,b$$

Beide Schwingungen verlassen ϱ in der Richtung von z. Die Strahlenbündel treffen also getrennt auf das polarisirende Prisma, welches sowohl von a_e als von b_o nur diejenigen Schwingungskomponenten hindurchlässt, die mit einer bestimmten Richtung $\xi \parallel$ sind. Bezeichnen wir $\sphericalangle\, x\,\xi = \varphi$, so erhalten wir für die Schwingungsparameter der beiden räumlich getrennten, auf ϱ' auffallenden Strahlenbündel, bezogen auf (x' y' z):

$$a'_e = -\varkappa\, k\, a \cos^2\varphi, \qquad b'_e = -\varkappa\, k\, a \cos\varphi \sin\varphi$$
$$a'_o = -\varkappa\, l\, b \sin\varphi \cos\varphi, \qquad b'_o = -\varkappa\, l\, b \sin^2\varphi.$$

Aus diesen zwei auf ϱ' auffallenden Strahlenbündeln entstehen beim Austritt aus ϱ' vier Strahlenbündel. Richten wir es nun so ein, dass die beiden mittleren Bündel zusammenfallen, so entsteht durch das Zusammenfallen des beidemal ordentlich gebrochenen mit dem beidemal ausserordentlich gebrochenen Strahle eine gemeinsame Schwingung, deren Parameter auf (x' y' z) bezogen, lauten:

$$1)\quad \begin{cases} a' = k\,a'_e = -\varkappa\, k^2\, a \cos^2\varphi \\ b' = l\,b'_o = -\varkappa\, l^2\, b \sin^2\varphi \\ \delta' \text{ sei} = \delta + \triangle \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

γ) Um die Dimensionen dieses zusammengesetzten Bündels möglichst gross zu machen, muss man die Grösse der Schirmöffnung passend wählen. Sind speziell beide Rhomboeder gleich dick, so erreichen jene Dimensionen ihr Maximum, wenn man die Oeffnung so wählt, dass beim Austritt des Lichtes aus ϱ beide Bilder in einer Geraden an einander grenzen.

δ) Sind nun (A B C D) die Parameter des auffallenden Lichtes, bezogen auf (x y z), und (A' B' C' D') die Parameter des aus ϱ' austretenden zusammengesetzten Lichtbündels, bezogen auf (x' y' z'), so ist nach 1):

$$2)\begin{cases} A' = \varkappa^2 k^4 A \cos^4\varphi \\ B' = \varkappa^2 l^4 B \sin^4\varphi \\ C' = \varkappa^2 k^2 l^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi\,(C\cos\triangle - D\sin\triangle) \\ D' = \varkappa^2 k^2 l^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi\,(C\sin\triangle + D\cos\triangle). \end{cases}$$

ε) Vorausgesetzt sei, dass $D = 0$ ist.

Zunächst drehen wir den ganzen Apparat so, dass $C = 0$ ist, d. h. der Hauptschnitt des Rhomboeders ϱ zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes $\parallel$ oder $\perp$ ist. Dann ist auch $D' = 0$ und $C' = 0$. Darauf dreht man das polarisirende Prisma um die z-Axe und variirt dadurch $\sphericalangle\,\varphi$.

Wenn dann für $\varphi = \varphi'$ $A' = B'$ wird, d. h. das Licht $(A'\,B'\,C'\,D')$ mittelst eines Polariskopes als natürliches Licht erkannt wird, so folgt:

$$W = (B : A) = (k : l)^4 \operatorname{ctg}^4\varphi'$$

und

3) Q = dem absoluten Betrage von:

$$(1 - [k : l]^4 \operatorname{ctg}^4\varphi') : (1 + [k : l]^4 \operatorname{ctg}^4\varphi').$$

ς) Der $\sphericalangle\,\varphi'$ wird direkt durch Messung bestimmt. Zur Kontrole dieser Messung kann der Umstand benutzt werden, dass bei einer ganzen Umdrehung des polarisirenden Prismas der Fall $A' = B'$ ausser für $\varphi = \varphi'$ noch für $\varphi = \pi - \varphi'$, $\varphi = \pi + \varphi'$ und $\varphi = 2\pi - \varphi'$ eintreten muss.

η) War das auffallende Licht (A B C D) bereits selbst natürliches Licht und bezeichnen wir φ' in diesem Falle mit ψ', so würde folgen:

4) $\operatorname{tg}^4\psi' = (k : l)^4$.

Der Apparat liefert mithin ein Mittel, $(k : l)$ experimentell zu bestimmen.

Litteraturangabe.

Zu § I. Beer: Einleitung in die höhere Optik (1882) S. 129, 132.

„ § II. Neumann: Vorlesungen über theoretische Physik (1885) S. 174. — Kirchhoff: Abhandlungen der Berliner Akademie (1876) S. 57, — Verdet (Exner): Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes II, S. 110.

„ § IV. V. Verdet: II. S. 83. — Neumann: S. 127. — Beer: S. 143.

„ § VI. Verdet: II. S. 94, 96. — Beer: S. 174.

„ § IX. Verdet: II. S. 342, 345. — Dove: Poggendorffs Annalen 132 S. 477.

„ § X. Verdet: II. S. 129. — Groth: Physikalische Krystallographie S. 53.

„ § XI. Verdet: II. S. 98. — Petrina: Poggendorffs Annalen 49 S. 236. — Beer: S. 166.

„ § XIII. Verdet: II. S. 126. — Bravais: Poggendorffs Annalen 96 S. 395.

„ § XIV. Verdet: II. S. 204. — Soleil: Poggendorffs Annalen 97 S. 154. — Senarmont: Poggendorffs Annalen 80 S. 293.

„ § XV. Verdet: II. S. 134, 171. — Neumann: S. 219.

„ § XVI. Verdet: II. S. 145. — Savart: Poggendorffs Annalen 49 S. 292. — Wild: Poggendorffs Annalen 122 S. 626. — Neumann: S. 169.

„ § XVII. Neumann: S. 150.

„ § XVIII. Wild: Poggendorffs Annalen 99 S. 243. — Neumann: S. 147.

„ § XIX. Wild: Poggendorffs Annalen 118 S. 213, 224. — Wild: Wiedemanns Annalen 20 S. 458. — Möller: Wiedemanns Annalen 24 S. 451. — Krech: Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Luisenstädtischen Gymnasiums. Berlin, Ostern 1883. S. 15—21.

Curriculum vitae.

Ich, Robert Leopold Burg, geboren am 10. Juni 1866 zu Berlin, besuchte in Berlin das Sophien-Gymnasium und das Askanische Gymnasium und darauf in Strafsburg i. E. das Lyceum. Nachdem ich von dort im Herbst 1884 mit dem Zeugniss der Reife entlassen war, studirte ich auf der Kaiser Wilhelms-Universität Strassburg Mathematik und Naturwissenschaften und bestand ebendort im Juli 1890 das Oberlehrer-Examen.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren Kundt, Kohlrausch, Cohn, Lorberg, Reye, Christoffel, Schering, Bücking, Fittig, Rose, Windelband, Ziegler.

Inhaltsverzeichniss.

		Seite
Einleitung		3
	Erster Theil.	
§ I.	Die Parameter des polarisirten Lichtes	5
§ II.	Durchgang des Lichtes durch eine planparalelle einaxige Krystallplatte	6
§ III.	Konstantes Licht	8
§ IV.	Allgemeine Parameter des Lichtes	9
§ V.	Natürliches Licht	11
§ VI.	Partiell polarisirtes Licht	11
§ VII.	Die sieben Klassen des Lichtes	14
	Zweiter Theil.	
§ VIII.	Eintheilung	16
§ IX.	Der planparalelle Glasspiegel	17
§ X.	Analyseure	19
§ XI.	Die einaxige Krystallplatte mit Analyseur	20
§ XII.	Fortsetzung von § XI.	24
§ XIII.	Das Bravais'sche Polariskop	25
§ XIV.	Der Soleil'sche Doppelquarz	29
§ XV.	Die einaxige, senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte mit Analyseur	32
§ XVI.	Die Savart'sche Platte	36
§ XVII.	Aufgabe des Polarimeters	41
§ XVIII.	Wild's erster Polarimeter	43
§ XIX.	Wild's zweiter Polarimeter	44
Litteraturangabe		47
Curriculum vitae		48